# 関数の概念の拡張としての超関数

2013年8月31日<br>小林　保

### (1) 概念の拡張

例えば、自然数は足し算を行うことができ、足し算の逆演算として引き算が考えられるが、引き算は常に行える訳ではない。式(1)の足し算に対して式(2)の引き算が考えられる。

$$2+3=5 \qquad (1)$$

$$5-3=2 \qquad (2)$$

式(1)と式(2)は逆演算である。式(3)の引き算は自然数の範囲で答えが求まらない。

$2-3$ （自然数の範囲で答え無し） (3)

自然数に対して0と負の数を付け加えると、 式(3)の引き算の答えが式(4)のように求まる。

$$2-3=-1 \qquad (4)$$

自然数に対して0と負の数を付け加え、整数と呼ぶ。自然数から整数を得る手続は、数の概念の拡張である。

整数に対して分数を付け加え、有理数と呼ぶ。有理数に対して無理数を付け加え、実数と呼ぶ。実数に対して虚数を付け加え、複素数と呼ぶ。いずれの手続も数の概念の拡張である。

### (2) 概念の中心的な性質

自然数から整数を得るとき、失われる性質がある。自然数には初めの数1が存在し、数１が最も小さい。整数は1より小さい数が0、-1、-2、・・・と幾つもあり、初めの数、最も小さい数は存在しない。初めの数が存在すると言う性質が失われたが、概念の拡張が行われるとき、この性質は中心的な性質ではないと考えられている。

自然数については、引き算ができるという性質は完全ではない。式(3)の引き算は自然数の範囲で答えが求まらない。自然数から整数を得るとき、引き算ができるという性質が中心的な性質として選ばれ、徹底されている。

概念の拡張が行われるとき、中心的な性質は失われない。

### (3) 既存の超関数の理論への不満

超関数といえば、「Schwartzの超関数(distribution)」や「佐藤の超関数(hyperfunction)」が知られている。Schwartzの理論や佐藤の理論は理論としては厳密にできていると思うが、関数の概念の拡張として超関数を理解しようとする立場から、不満を感じる。

独立変数から従属変数への対応が関数の基本的な定義である。対応関係が存在しない点は定義域外であり、定義域外は議論、考察の対象外である。対応関係が、関数の概念の中心的な性質であり、概念の拡張が行われるとき、中心的な性質は失われてはいけない。超関数についても、定義域を明示し、定義域内の全ての点について関数値が定義されるべきである。

### (4) ディラック関数の特異点

ディラック関数$\delta(x)$の点$x=0$ において関数値が存在しない。関数値が存在しなければ、定義域外になってしまう。本来的には、定義域外は議論、考察の対象外である。ディラック関数について、点$x=0$ を議論の対象外にしてしまっては、超関数の理論の意味がない。定義域内にするために、関数値を定義したい。概念の拡張が行われるので、普通の意味の関数値でなくとも、関数値らしきものが定義できれば良い。ディラック関数$\delta(x)$の点$x=0$ においては大きさ1の量が集中していると説明したいが、単純に式(5)、式(6)とするのは適切でない。

$$\delta(x)=1 \quad (x=0) \quad \text{（不適切）} \qquad (5)$$

$$\delta(x)=0 \quad (x\neq 0) \quad \text{（不適切）} \qquad (6)$$

### (5) 成分表示の導入

超関数の特異点の特徴を説明するために、超関数の表現として成分を導入した。超関数$f(x)$の左連続成分$f_h(x)$、段差成分$f_d(x)$、1次成分$f_1(x)$、2次成分$f_2(x)$、・・・として、成分を並べて、式(7)で超関数$f(x)$を表示する。

$$f(x)=\{f_h(x), f_d(x), f_1(x), f_2(x), \cdots\} \qquad (7)$$

特異化変数$\varepsilon$を含む近似関数$F(x)$と点半径変数$\rho$を用いて、超関数$f(x)$の成分を式(8)～式(10)で計算する。

$$f_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F(x-\rho) \qquad (8)$$

$$f_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \{F(x+\rho)-F(x-\rho)\} \qquad (9)$$

$$f_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F(t)\,dt$$

$$(n=1、2、3、\cdots) \qquad (10)$$

通常点においては、左連続成分$f_h(x)$以外の成分は関数値0の定数関数である。

式(11)の関数$\Delta(x)$はディラック関数$\delta(x)$の近似関数の1つである。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad (11)$$

式(11)を式(8)～式(10)の近似関数$F(x)$に代入して成分$\delta_h(x)$、$\delta_d(x)$、$\delta_1(x)$、$\delta_2(x)$、・・・を計算し、式(7)に代入すれば、ディラック関数$\delta(x)$について、式(12)、式(13)のようになる。

$$\delta(x)=(0, 0, 1, 0, 0, \cdots) \quad (x=0) \qquad (12)$$

$$\delta(x)=(0, 0, 0, 0, 0, \cdots) \quad (x\neq 0) \qquad (13)$$

式(12)はディラック関数$\delta(x)$の特異点における関数値である。式(12)、式(13)の1次成分$\delta_1(x)$が式(5)、式(6)の関数$\delta(x)$と同じである。

### (6) 点の内部変動

成分表示型の超関数の理論の要点は、各点の性質を点の内部変動で説明しようという着想である。近似関数$F(x)$についての区間$x-\rho\leqq t\leqq x+\rho$ を超関数$f(x)$の点$t=x$についての点域と呼ぶ。近似関数$F(x)$の点域における変動を超関数$f(x)$の点の内部変動と呼ぶ。激しい内部変動が特異点の性質を形成する。式(11)について$\Delta(0)$は発散する。通常点の内部変動は激しくない。