ディラック関数の点x＝0は＋∞に発散するのか？

小林　保

１．$\delta(x)=+\infty$

初等の教科書において、ディラック関数 $\delta(x)$ の点x＝0における関数値が＋∞に発散する、と説明されている。式(1)が成り立つ。

$$\delta(0)=+\infty \qquad (1)$$

２．１つの近似関数

式(2)の近似関数 $\Delta(x)$ は補助変数 ε を含み、$\varepsilon\to0$ の極限においてディラック関数 $\delta(x)$ を表すと考えられる。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \qquad (2)$$

式(2)の関数 $\Delta(x)$ は $\varepsilon\to0$ のとき、点x＝0における関数値 $\Delta(0)$ が+∞に発散し、式(3)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta(0)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(0)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}=+\infty \qquad (3)$$

式(3)は $\varepsilon\to0$ の極限を考えているから、ディラック関数 $\delta(x)$ の説明になっており、式(1)を意味している。

３．他の近似関数

式(4)の近似関数 $\Delta(x)$ も補助変数 ε を含み、$\varepsilon\to0$ の極限においてディラック関数 $\delta(x)$ を表し、ディラック $\delta(x)$ の近似関数である。

$$\Delta(x)=\frac{2x^2}{\varepsilon^2\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \qquad (4)$$

ディラック $\delta(x)$ の近似関数は無数に多く存在する。無数に多く存在する近似関数は同等であると言う。式(4)の関数 $\Delta(x)$ は、式(2)の関数 $\Delta(x)$ と異なって、$\varepsilon\to0$ のとき、点x＝0における関数値 $\Delta(0)$ について式(5)が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta(0)=\lim_{\varepsilon\to0}0\cdot\exp(0)=\lim_{\varepsilon\to0}0=0 \qquad (5)$$

式(5)は $\varepsilon\to0$ の極限を考えているから、ディラック関数 $\delta(x)$ の説明になっており、式(6)を意味している。

$$\delta(0)=0 \qquad (6)$$

式(2)の近似関 $\Delta(x)$ を用いれば、式(1)が成り立ち、式(4)の近似関数 $\Delta(x)$ を用いれば、式(6)が成り立つ。

４．疑問

式(1)と式(6)の両方とも成り立つのに、式(1)だけを説明に用いることに、違和感を感じる。ディラック関数の点x＝0は、本当に、＋∞に発散するのだろうか。