# 大きさ1の量はどこにあるのか？

小林　保

## １．大きさ1の量

初等の教科書において、大きさ1の量が点x＝0に集中して存在する分布を、ディラック関数$\delta(x)$が表す、と説明されている。式(1)の近似関数$\Delta(x)$は補助変数$\varepsilon$を含み、$\varepsilon\to 0$の極限においてディラック関数$\delta(x)$を表すと考えられる。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad (1)$$

式(1)の近似関数$\Delta(x)$は式(2)を満足する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,dx=1 \qquad (2)$$

初等の教科書においては、式(2)で計算される大きさ1の量が点x＝0に集中して存在する、と説明される。式(2)で、$\varepsilon\to 0$の極限を考えると式(3)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,dx=1 \qquad (3)$$

## ２．分散した分布

式(3)は$\varepsilon\to 0$の極限を考えているから、ディラック関数$\delta(x)$についての説明になっている。式(3)を見ると、大きさ1の量は区間$-\infty\leqq x\leqq+\infty$に分散して存在しているように見える。点x＝0に集中して存在しているようには思えない。

## ３．集中した分布

$\varepsilon\to 0$の極限のとき、区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$は点x＝0と同一と見なすことができるから、大きさ1の量が点x＝0に集中して存在する分布を説明するためには、式(3)ではなく、式(4)を用いるべきであると思う。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx=1 \qquad (4)$$

## ４．計算

式(4)を計算するために、式(5)を計算する。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)dx \qquad (5)$$

式(6)の変数変換すると、式(7)が成り立つ。

$$\frac{x}{\varepsilon}=\frac{z}{\sqrt{2}} \qquad (6)$$

$$dx=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,dz \qquad (7)$$

$x=-\varepsilon$が$z=-\sqrt{2}$に対応し、$x=+\varepsilon$が$z=+\sqrt{2}$に対応するから、式(8)のように計算される。

$$\begin{aligned}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx&=\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-z^2)\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,dz\\&=\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2)\,dz\\&=2\int_{0}^{+\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2)\,dz \qquad (8)\end{aligned}$$

式(8)の最後辺の中の被積分関数が平均値0、標準偏差1の正規分布関数であるから、$\sqrt{2}=1.41$として関数表から0.4207を求め、式(9)のように計算される。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx=2\times 0.4207=0.841 \qquad (9)$$

$\varepsilon\to 0$の極限を考えると、式(10)が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx=0.841 \qquad (10)$$

式(4)を期待していたが、結果は式(10)であり、式(4)は誤りである。式(4)が成り立たないから、代わりに、式(3)が説明のために用いられたと考えられる。

## ５．疑問

大きさ1の量が点x＝0に集中して存在する分布を説明するために、区間$-\infty\leqq x\leqq+\infty$に大きさ1の量が分散して存在する分布の式(3)を用いることに、違和感を感じる。大きさ1の量が、本当に、点x＝0に集中して存在しているのだろうか。