超関数はどのように分布を表すのか？

小林　保

１．関数と汎関数

数値xを定めるとそれに応じて数値yが定まるような規則がある場合にyはxの関数であると言い、式(1)のように表す。

$$y = f(x) \tag{1}$$

式(1)では文字fが関数を表している。関数$\phi(x)$を定めるとそれに応じて数値vが定まるような規則がある場合にvは$\phi(x)$の汎関数であると言い、式(2)のように表す。

$$v = \tau(\phi) \tag{2}$$

式(2)では文字τが汎関数を表している。

先に数値xや関数$\phi(x)$を定めるから、数値xや関数$\phi(x)$は入力要素であり、それに応じて数値yや数値vが定まるから、数値yや数値vは出力要素である。関数と汎関数の出力要素は数値で同じであるが、関数の入力要素は数値であり、汎関数の入力要素は関数であり、異なっている。汎関数と関数は同型の記号を用いる。関数の記号は入力要素xを括弧()で包んで文字fに付属させる。汎関数の記号は入力要素ϕを括弧()で包んで文字τに付属させる。

２，関数が分布を表す

分布は分布の場と分布する量の対応関係で表される。例えば、空間内の多くの点について、点Pの温度Tが測定されたとき、点Pと温度Tの対応関係が温度の分布である。座標を用いて各点を表すことができる。一次元空間の場合、点Pは座標xで表され、点Pと温度Tの対応関係を座標xと温度Tの対応関係に置き換えることができ、式(3)の関数fを用いて表すことができる。

$$T = f(x) \tag{3}$$

三次元空間の場合、点Pは座標(x, y, z)で表され、点Pと温度Tの対応関係を座標(x, y, z)と温度Tの対応関係に置き換えることができ、式(4)の3変数関数fを用いて表すことができる。

$$T = f(x, y, z) \tag{4}$$

温度の分布の例については、点Pの集合が分布の場、温度Tの数値が分布する量である。式(3)や式(4)の関数が分布を表す。

３．超関数の定義

Schwarzの理論において、超関数は汎関数を用いて説明される。代表的な超関数であるディラック関数$\delta(x)$は、任意の関数$\phi(x)$を用いて式(5)のように定義される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\phi(x)\,dx = \phi(0) \tag{5}$$

式(5)の関数$\phi(x)$以外の部分が関数$\phi(x)$に作用して、数値$\phi(0)$を生成すると考えることができる。式(5)は入力要素が関数$\phi(x)$、出力要素が数値$\phi(0)$の汎関数と考えることができ、式(6)の汎関数$\tau(\phi)$を意味している。

$$\tau(\phi) = \phi(0) \tag{6}$$

超関数$\delta(x)$は式(6)の汎関数$\tau(\phi)$を用いて説明されている。

４．超関数と分布

Schwarzの理論において、超関数が分布を表すと言われる。代表的な超関数であるディラック関数$\delta(x)$について、式(5)や式(6)の説明から、どのように分布を表すのだろうか。分布を考える際に、分布の場と分布する量を明示することが重要であるが、式(5)や式(6)において、分布の場と分布する量が明示的に説明されていない。分布の場は式(5)の左辺の変数xであると思われるが、式(6)には変数xが記述されていない。分布する量は式(5)の左辺の記号$\delta(x)$であると思われるが、記号$\delta(x)$がどのような量を表すのか説明が無いし、式(6)には記号$\delta(x)$が記述されていない。

５．疑問

Schwarzの理論において、超関数が或る数学的な実体を表すと言うのであれば、超関数をそのような物と捉えれば良い。しかし、超関数が分布を表すと言うのには、分布の場と分布する量についての明示的な説明が無く、違和感を感じる。超関数はどのように分布を表すのだろうか 。