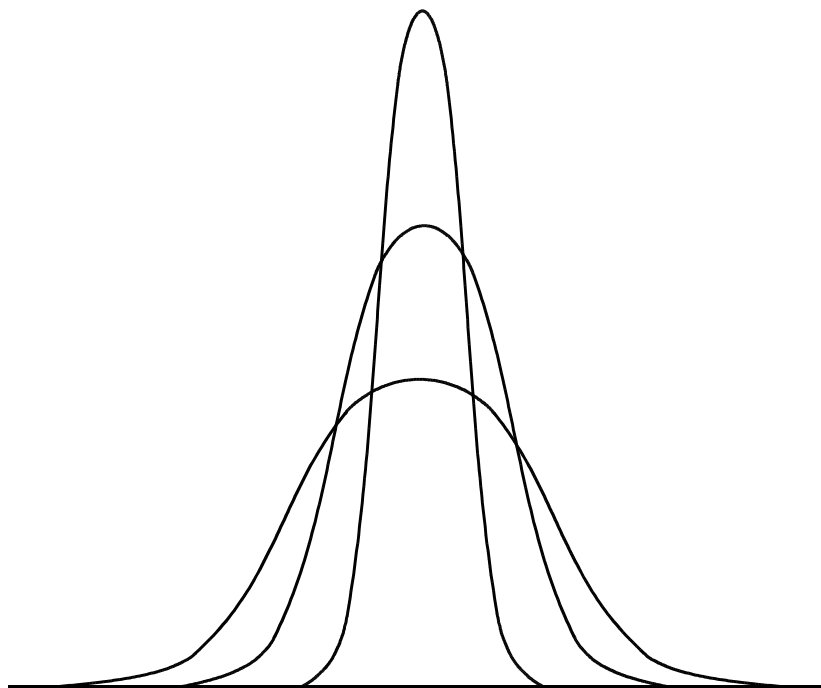


# 成分表示型の超関数

— 裾野無型の近似 —



小林 保 著

## 目次

第1章 裾野無型版と詳細版	1
第2章 荷重の分布の表現	2
(1) 3種類の荷重	2
(2) 分布荷重	2
(3) 集中荷重	8
(4) 集中モーメント	12
(5) 荷重の重ね合わせ	14
(6) 成分4個型を用いた荷重の表現	16
第3章 数学的表現への変換	17
(1) 実在を確認しない凝視関数	17
(2) 有限回微分可能な近似関数	18
(3) 超関数の定義	19
第4章 詳細版への誘い	23

## 第1章 裾野無型版と詳細版

「構造力学から超関数への入門－成分表示型の超関数－」を著述したが、本文だけでA5判225頁もあり、読むのに努力を要する。著述を簡略化し、頁数を減らし、読む努力を軽くすることを試みる。「構造力学から超関数への入門－成分表示型の超関数－」が詳細版であり、「成分表示型の超関数－裾野無型の近似－」が裾野無型版である。裾野無型版は本文だけでA5判24頁である。裾野無型版は構造力学の初歩を学んだことのある読者を想定している。ここで構造力学と呼んでいる科目は、土木工学科では応用力学と呼ばれることが多く、機械工学科では材料力学と呼ばれることが多い。建築科や造船工学科や航空工学科にも類似の科目がある。内容が微妙に異なるが、初歩の部分は共通である。構造力学において単位の異なる3種類の荷重を用いる。詳細版も裾野無型版も3種類の荷重を統合して考察することから議論を始めている。初級の技術者にとって汎関数型の超関数の理論は難解である。裾野無型版では汎関数型の超関数に言及することを避けた。

## 第2章 荷重の分布の表現

### (1) 3種類の荷重

構造物には分布荷重、集中荷重、集中モーメントの3種類の荷重が作

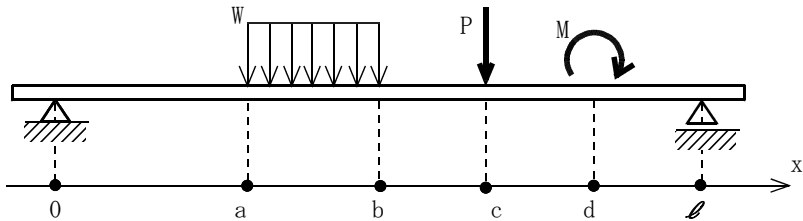


図2-1 3種類の荷重

用する。図2-1は長さ  $l$  の単純梁であり、単純梁を材軸線が代表する。荷重は材軸線の各点に分布するから、材軸線に沿って設定された座標  $x$  を独立変数とする関数で、荷重を表現するのが自然である。材軸線の各点の荷重の状態は1つである。材軸線に沿って座標  $x$  を設定し、左端  $x=0$ 、右端  $x=l$  とする。点  $x=a$  から点  $x=b$  までに大きさ  $W$  の等分布荷重が作用し、点  $x=c$  に集中荷重  $P$  が作用し、点  $x=d$  に集中モーメント  $M$  が作用している。

分布荷重  $W$  は単位が  $N/m$  であり、構造力学では図2-1に示すように平行な多くの細い矢印で表される。集中荷重  $P$  は単位が  $N$  であり、太い矢印で表され、集中モーメント  $M$  は単位が  $Nm$  であり、太い弧矢印で表される。荷重を関数で表す場合、図2-1の単純梁は2つの支点の間が考察対象であるから、区間  $0 \leq x \leq l$  が定義域である。荷重を関数で表すのが自然ではあるが、種類の異なる荷重が作用するから、単一の関数で表すことはできない。種類の異なる荷重を成分に分けて別々の関数として表示し、荷重としての共通の性質を考察する必要がある。

### (2) 分布荷重

[例]

図2-1の分布荷重の例として図2-2の上段のような直方体ABCDの塊によ

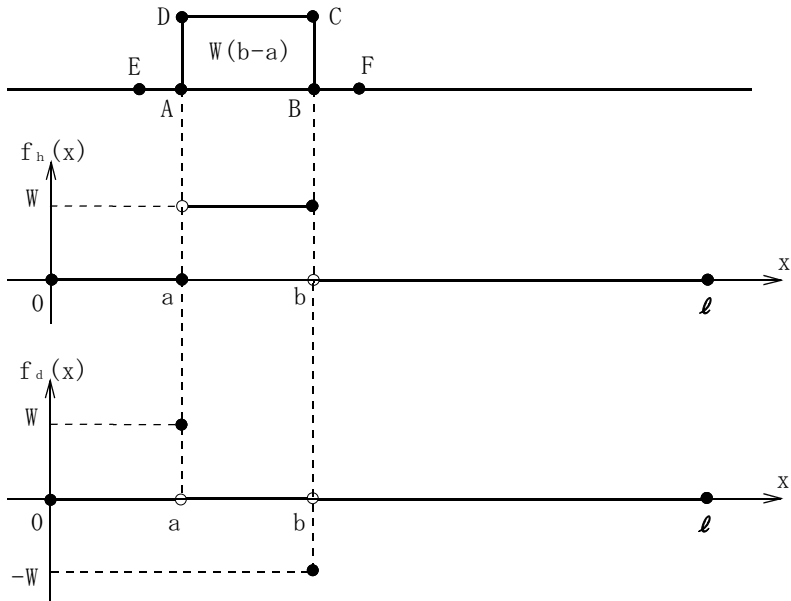


図2-2 全景眺望による直方体の塊

る荷重を想定する。路面EFに沿って座標 $x$ を設定する。議論を単純にするために、路面幅と直方体の塊の幅を同じにし、路面に沿って座標 $x=a$ の点Aから座標 $x=b$ の点Bまでを直方体の長さとする。直方体の重量 $W(b-a)$ が路面に荷重として作用する。

[段差単位]

区間 $0 \leq x < a$ や区間 $a < x < b$ や区間 $b < x \leq l$ において分布荷重を連続関数で表すことができるが、点 $x=a$ においては関数値が急増し、点 $x=b$ においては関数値が急減しており、普通の関数で表すことはできない。分布荷重 $f_0(x)$ を式2・1、式2・2の左連続成分 $f_h(x)$ と式2・3、式2・4、式2・5の段差成分 $f_d(x)$ に分けて表すことにする。

$$f_h(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq a, b < x \leq l) \quad 2 \cdot 1$$

$$f_h(x) = W \quad (a < x \leq b) \quad 2 \cdot 2$$

$$f_d(x) = 0 \quad (0 \leq x < a, a < x < b, b < x \leq l) \quad 2 \cdot 3$$

$$f_d(x) = W \quad (x = a) \quad 2 \cdot 4$$

$$f_d(x) = -W \quad (x=b) \quad 2\cdot5$$

関数 $f_h(x)$ と関数 $f_d(x)$ の定義域は区間 $0 \leq x \leq \ell$ である。左連続成分 $f_h(x)$ と段差成分 $f_d(x)$ の単位はN/mで同じである。左連続成分 $f_h(x)$ は図2-2の中段のように図示され、段差成分 $f_d(x)$ は図2-2の下段のように図示される。点 $x=b$ においては段差成分 $f_d(x)$ の負の数値によって急減を表現している。分布荷重 $f_o(x)$ は左連続成分 $f_h(x)$ と段差成分 $f_d(x)$ を組にしたものであり、式2・6のように点, で区切り、括弧{}で包んで数ベクトルと同じ形式で表すことが考えられる。

$$f_o(x) = \{f_h(x), f_d(x)\} \quad 2\cdot6$$

ベクトルと同じ形式で表すのであれば、数値1と記号 $\sqrt{\quad}$ を基底ベクトルとして式2・7のように表すことが考えられる。

$$f_o(x) = f_h(x) + f_d(x) \sqrt{\quad} \quad 2\cdot7$$

記号 $\sqrt{\quad}$ を段差単位と呼ぶ。図2-2の中段の関数 $f_h(x)$ が点 $x=a$ 付近で急増して段差になる状況を図案化し、増加の方向を矢印によって示して、記号 $\sqrt{\quad}$ を作成した。左連続成分 $f_h(x)$ と段差成分 $f_d(x)$ は単位がN/mで同じであるが、性質の異なる量であり、別の成分として表示される。

[詳細凝視]

図2-2を見ながら近付いて、部分EFを拡大して詳細に見ると、図2-3の上半のようになる。直方体の塊ABCDが変形してGHIJKLCDとなり、路面は直線EFが変形して曲線EHIJKFになり、曲線HIJKを介して直方体の塊の重量 $W(b-a)$ が路面に伝達されている。伝達される荷重 $F_o(x)$ の概形は図2-3の下半のように図示される。関数 $F_o(x)$ の単位はN/mであり、関数 $f_o(x)$ の単位と同じである。点Aの付近が複雑に変形し、曲線HIの部分で滑らかに分布荷重 $F_o(x)$ が0から $W$ まで増加する。図2-3においては長さHPが長さPQより長いので、長い方の長さHPを $\mu$ とし、長さPRが $\mu l$ になる点Rをとり、直線HQの代わりに直線HRを考える。区間 $a-\mu \leq x \leq a+\mu$ が直線HRを表すから、図2-3の下半に図示するように区間 $a-\mu \leq x \leq a+\mu$ において分布荷重 $F_o(x)$ が0から $W$ まで増加し、式2・8、式2・9が成り立つ。

$$f_h(a) = F_o(a-\mu) \quad 2\cdot8$$

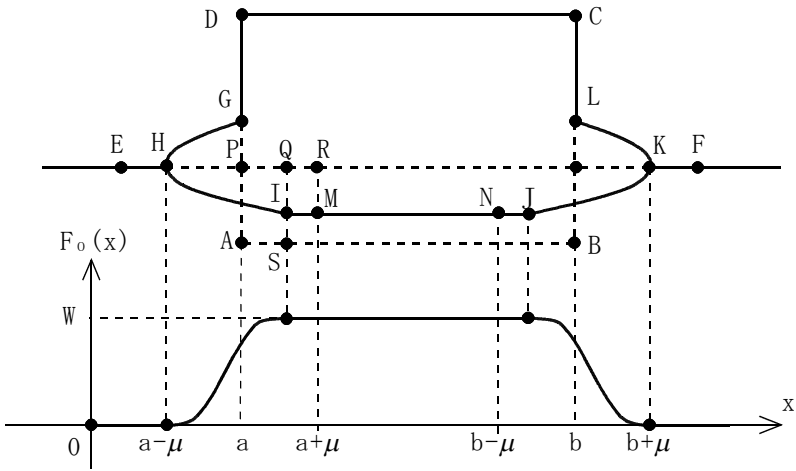


図2-3 詳細凝視による直方体の塊

$$f_a(a) = F_o(a+\mu) - F_o(a-\mu) \quad 2 \cdot 9$$

点Bの付近においても点Aの付近と同じように、分布荷重 $F_o(x)$ が $W$ から0まで減少する。直方体や路面の材質が均一であれば、点Bの付近においても長さ $\mu$ を考えて良い。直線IJの部分は等分布荷重であるが、直線IJの代わりに直線MNを考え、関数 $F_o(x)$ を式2・10で表す。

$$F_o(x) = W \quad (a+\mu \leq x \leq b-\mu) \quad 2 \cdot 10$$

直方体の塊の全重量は区間 $a-\mu \leq x \leq b+\mu$ で伝達され、分布荷重 $F_o(x)$ の合力 $W(b-a)$ に一致するから、式2・11が成り立つ。

$$\int_{a-\mu}^{b+\mu} F_o(x) dx = \int_{a+0}^b f_h(x) dx = W(b-a) \quad 2 \cdot 11$$

式2・11の中辺は式2・12の広義積分を意味している。

$$\int_{a+0}^b f_h(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f_h(x) dx \quad 2 \cdot 12$$

分布荷重の左連続成分 $f_h(x)$ は点 $x=a$ において右側積分不能であり、広義積分を用いなければならない。正の数 $\varepsilon$ とすると点 $x=a+\varepsilon$ は積分可能であり、式2・12の右辺は収束する。分布荷重の左連続成分 $f_h(x)$ は点 $x=b$ において左側積分可能である。関数 $F_o(x)$ は区間 $a-\mu \leq x \leq b+\mu$ で連続であ

り、積分可能である。

#### [同等な凝視関数]

図2-3の上半で路面と直方体の剛性が変わると曲線HIJKも変化する。I Sが直方体の変形量、QIが路面の変形量、QSが合計の変形量である。直方体の剛性が大きく、路面の剛性が小さければ、ISが小さく、QIが大きい。逆に、直方体の剛性が小さく、路面の剛性が大きければ、ISが大きく、QIが小さい。両者が共に大きければ、QSは小さく、逆に、両者が共に小さければ、QSは大きい。曲線HIJKが異なれば関数 $F_0(x)$ も異なり、関数 $f_0(x)$ が同じでも関数 $F_0(x)$ は異なる。関数 $f_0(x)$ と関数 $F_0(x)$ の対応は1対多である。異なる関数 $F_0(x)$ が同一の関数 $f_0(x)$ と対応するとき、異なる関数 $F_0(x)$ は互いに同等であると考える。

#### [全景眺望]

図2-3を見ながら遠ざかると、9点G、H、I、M、A、S、P、Q、Rがだんだん重なって区別がつかなくなり、図2-2の上段の点Aのように見えてくる。図2-2は広い範囲を遠くから眺めており、全景眺望の状態である。図2-3は各部を詳細に観察しており、詳細凝視の状態である。全景眺望と詳細凝視の違いを視点と呼び、2つの視点を操作することを視点移動と呼ぶ。分布荷重は関数 $f_0(x)$ と関数 $F_0(x)$ の対によって理解されるから、複視点関数と呼び、関数 $f_0(x)$ を眺望関数、関数 $F_0(x)$ を凝視関数と呼ぶ。視点移動により「図2-2の点 $x=a$ 」と「図2-3の区間 $a-\mu \leq x \leq a+\mu$ 」が対応するから、図2-2の点 $x=a$ を有域点と呼び、図2-3の区間 $a-\mu \leq x \leq a+\mu$ を点域と呼び、長さ $\mu$ を点半径と呼ぶ。点半径 $\mu$ は非常に小さい正の数である。点半径 $\mu$ は凝視関数 $F_0(x)$ に付属しており、多くの同等な関数 $F_0(x)$ ごとに異なる点半径 $\mu$ が存在する。図2-2の点 $x=b$ も有域点である。直方体や路面の材質が均一であれば、図2-2の点 $x=b$ における点半径も点 $x=a$ と同じ $\mu$ である。有域点でない点を通常点と呼ぶ。

#### [定義域]

図2-1において部分載荷等分布荷重の端点 $x=a$ と $x=b$ が有域点であるが、集中荷重の作用点 $x=c$ や集中モーメントの作用点 $x=d$ も有域点である。点 $x=0$ と $x=l$ は支承であり、反力として上向きの集中力が発生する。反



力の作用点 $x=0$ と $x=l$ も有域点である。有域点 $x=0$ の点半径 $\alpha$ として点域 $-\alpha \leq x \leq +\alpha$ を考え、有域点 $x=l$ の点半径 $\beta$ として点域 $l-\beta \leq x \leq l+\beta$ を考えると、凝視関数 $F_0(x)$ の定義域は区間 $-\alpha \leq x \leq l+\beta$ であり、眺望関数 $f_0(x)$ の定義域の区間 $0 \leq x \leq l$ と対応する。図2-4に模式化した丸木橋を示す。丸木が両岸に支えられ、丸木橋と人の重さを両岸に伝えている。丸木は図2-5のようにちょうど川幅でなく図2-4のように川幅より少し長い。

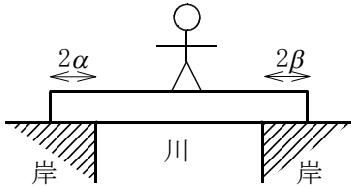


図2-4 可能な丸木橋

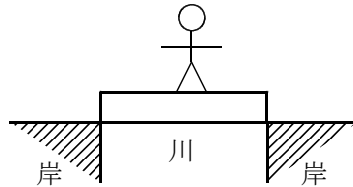


図2-5 不可能な丸木橋

丸木橋は丸木の太さ程度の長さが岸と重なっていないと、丸木橋と人の重さを両岸に伝えられない。左岸が丸木と長さ $2\alpha$ だけ重なり、右岸が丸木と長さ $2\beta$ だけ重なっている。図2-4の $\alpha$ と $\beta$ が支承における点半径である。図2-4と図2-5から支承が有域点であることが理解される。眺望関数 $f_0(x)$ の区間 $0 < x < l$ は凝視関数 $F_0(x)$ の区間 $+\alpha \leq x \leq l-\beta$ と対応する。区間 $a-\mu \leq x \leq b+\mu$ の外では分布荷重は伝達されないから、式2.13が成り立つ。

$$F_0(x) = 0 \quad (-\alpha \leq x \leq a-\mu, b+\mu \leq x \leq l+\beta) \quad 2 \cdot 13$$

凝視関数 $F_0(x)$ は式2.10、式2.11、式2.13を満足する。

[段差のない分布]

図2-2、図2-3の荷重は端点AとBにおいて段差があるが、段差のない分布荷重についても考える。図2-6の上半は路面CDの点Aから点Bまでに砂を盛り上げた状況である。砂は粘性がないので点Aと点Bにおいても段差がなく連続している。路面CAEBDが変形して曲面CAFBDになり、曲面AFBを介して荷重が伝達されている。伝達される荷重の概形は図2-6の下段のように図示される。図2-6の分布荷重は有域点を持たず、定義域の全部において連続であり、式2.14が成り立つ。

$$f_a(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \quad 2 \cdot 14$$

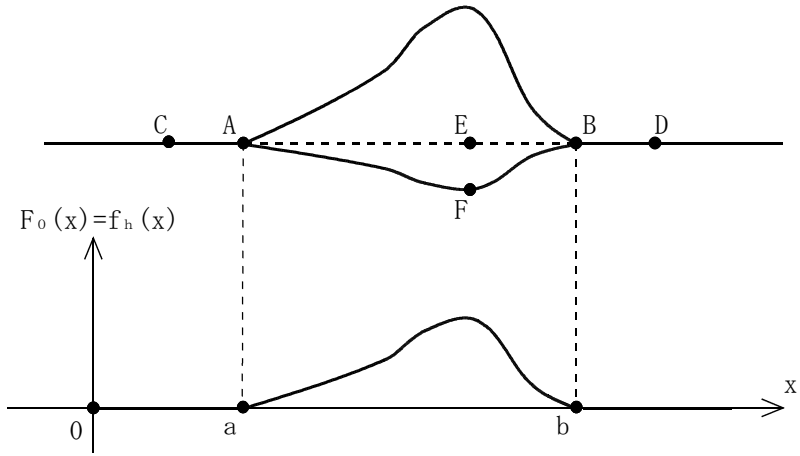


図2-6 段差のない分布荷重

図2-3の分布荷重も図2-6の分布荷重も通常点においては式2・15が成り立つ。

$$F_0(x) = f_h(x) \quad (x \text{が通常点}) \quad 2 \cdot 15$$

### (3) 集中荷重

[例]

図2-1の集中荷重の例として図2-7の上半の自動車の輪荷重を想定する。

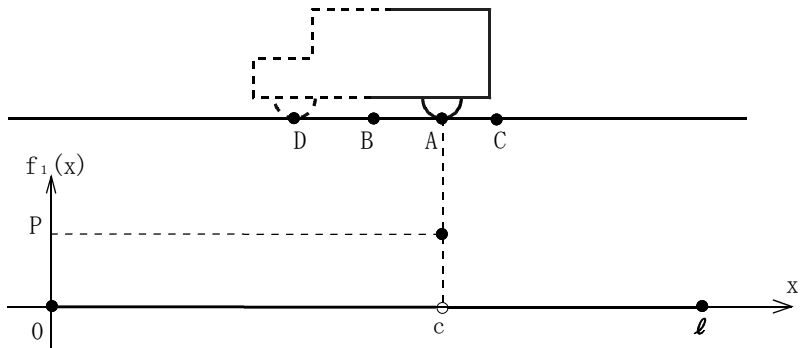


図2-7 全景眺望による輪荷重

後輪が点Aで路面BCと接している状況を考え、前輪Dを考えないことにす

る。車両重量の内の後輪が分担している荷重 $P$ が車輪から路面に伝達される。路面 $BC$ に沿って座標 $x$ を設定し、点 $A$ の座標を $x=c$ とする。荷重を表示する関数 $f_1(x)$ とすると、図2-7の下半のように図示され、式2・16、式2・17で表される。

$$f_1(x) = 0 \quad (0 \leq x < c, c < x \leq \ell) \quad 2 \cdot 16$$

$$f_1(x) = P \quad (x = c) \quad 2 \cdot 17$$

関数 $f_1(x)$ の単位は荷重 $P$ の単位と同じ $N$ である。関数 $f_1(x)$ は眺望関数であり、定義域は区間 $0 \leq x \leq \ell$ である。

[詳細凝視]

図2-7を見ながら近付いて、部分 $BC$ を詳細に見ると、図2-8の上半のよ

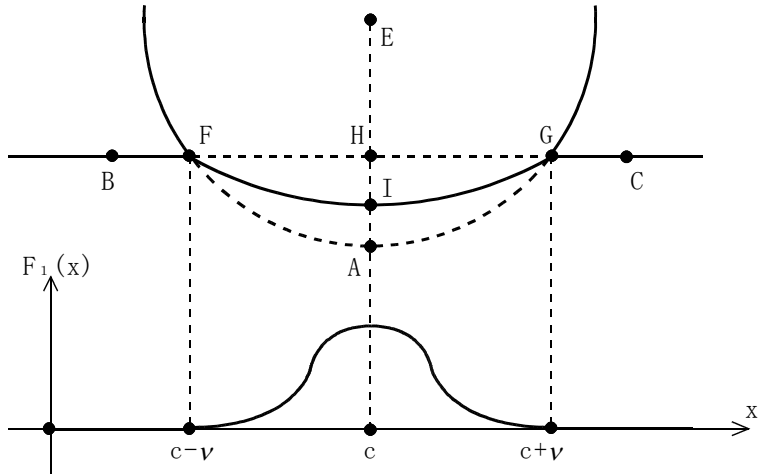


図2-8 詳細凝視による輪荷重

うになる。点 $E$ を中心とする車輪は曲線 $FAG$ が変形して曲線 $FIG$ になり、路面は直線 $BC$ が変形して曲線 $BFIGC$ になり、曲線 $FIG$ を介して輪荷重が路面に伝えられている。車輪は直線 $AE$ に関して対称であるから $FH=HG$ であり、この長さを $v$ とする。輪荷重は点域 $c-v \leq x \leq c+v$ に分布する力で、概形は図2-8の下半の関数 $F_1(x)$ のように図示される。関数 $F_1(x)$ の単位は $N/m$ であり、関数 $f_1(x)$ と関数 $F_1(x)$ は単位が異なっている。関数 $F_1(x)$ は凝視関数であり、定義域は区間 $-\alpha \leq x \leq \ell + \beta$ である。点域 $c-v \leq x \leq c+v$ の外

には分布力 $F_1(x)$ は分布しないので、式2・18が成り立つ。

$$F_1(x) = 0 \quad (-\alpha \leq x \leq c-v, \quad c+v \leq x \leq \ell+\beta) \quad 2 \cdot 18$$

分布力 $F_1(x)$ の合力は関数 $f_1(x)$ の点 $x=c$ における値 $P$ と一致するから、式2・19が成り立つ。

$$\int_{c-v}^{c+v} F_1(x) dx = f_1(c) = P \quad 2 \cdot 19$$

分布力 $F_1(x)$ の点 $x=c$ の周りのモーメントは0であるから、式2・20が成り立つ。

$$\int_{c-v}^{c+v} F_1(x) (x-c) dx = 0 \quad 2 \cdot 20$$

#### [同等な凝視関数]

図2-8の上半で路面と車輪の剛性が変わると曲線FIGも変化する。AIが車輪の変形量、HIが路面の変形量、AHが合計の変形量である。車輪の剛性が大きく路面の剛性が小さければ、AIは小さくHIは大きい。逆に車輪の剛性が小さく路面の剛性が大きければ、AIは大きくHIは小さい。両者が共に大きければAHは小さく、逆に共に小さければAHは大きい。曲線FIGが異なれば凝視関数 $F_1(x)$ も異なり、眺望関数 $f_1(x)$ が同じであっても凝視関数 $F_1(x)$ は異なる。眺望関数 $f_1(x)$ と凝視関数 $F_1(x)$ の対応は1対多である。異なる凝視関数 $F_1(x)$ が同一の眺望関数 $f_1(x)$ に対応するとき、異なる凝視関数 $F_1(x)$ は互いに同等であると考えられる。

#### [全景眺望]

図2-8を見ながら遠ざかると、5点A、F、G、H、Iがだんだん重なって区別がつかなくなり、図2-7上半の点Aのように見えてくる。視点移動により「図2-7の点 $x=c$ 」と「図2-8の区間 $c-v \leq x \leq c+v$ 」が対応するから、図2-7の点 $x=c$ は有域点である。有域点の点半径 $v$ の大きさの目安について考える。アスファルト舗装の駐車場に駐車した小型乗用車の後輪について、車輪とアスファルトの間に車輪の前後から薄い紙を差し込み、紙を平行にしてその間隔を測定したところ、11cmであった。タイヤの直径は54cmである。小型乗用車は前輪駆動で長さ約3.7m、幅約1.6m、高さ約1.5mである。空車時の重量が約1000kgで、前輪と後輪の荷重分担率が約

6:4であるから、後輪1個の荷重は約200kgである。タイヤの直径54cmに対して点域半径 $v$ は5.5cm程度である。5.5cm程度であれば特殊な装置を用いることなく、目視で大きさを認識できる。点半径の長さ5.5cm程度を、捨象して点と考えるか捨象しないで有限の長さとするかは、観察者の主観による。視点移動は、観察者と観察対象の距離の変化だけでなく、観察者の主観の変化を交えた判断である。

[例]

図2-7、図2-8の輪荷重は車輪の中心Eを通る鉛直線AEに関して左右対称であるが、左右対称でない集中荷重についても考える。図2-9の上半は滑らかな底面JFAGMを持つ柱JFAGMLKを载荷装置とする大きさPの集中荷重で

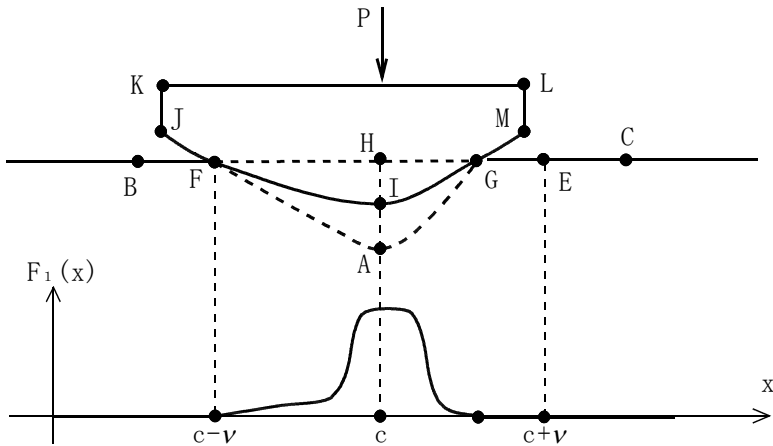


図2-9 非対称分布の集中荷重

ある。底面JFAGMは変形してJFIGMとなり、路面BFHGCは変形してBFIGCとなり、曲面FIGを介して荷重が伝達されている。曲面FIGが左右対称でなく、図2-9においてはFHがHGより長いので長さFHを点半径 $v$ とし、 $HE=v$ となる点Eをとり、直線FEを点域と考える。伝達される分布荷重 $F_1(x)$ の概形も図2-9の下半のように左右対称でない。図2-9の分布荷重 $F_1(x)$ も式2・18、2・19、式2・20が成り立つ。図2-8では対称であるから直線FGの2等分点が点Hであるが、図2-9では非対称であるから点Hが直線FGの2等分点ではない。点Hの座標 $x=c$ は式2・20を満足する数値 $c$ として、逆に定義さ

れる。点A、I、Hの座標は同じ $x=c$ であり、点Iが集中荷重の作用点である。図2-8の凝視関数 $F_1(x)$ をも含む図2-9の凝視関数 $F_1(x)$ が式2・19、式2・20を満足するならば同等であり、式2・16、式2・17の眺望関数 $f_1(x)$ に対応する。図2-4の支承における長さ $\alpha$ 、 $\beta$ は集中力の点半径という意味で図2-9の $v$ と同じである。

#### (4) 集中モーメント

##### [反力モーメント]

集中モーメントが具体的構造物に図2-1のように荷重として作用することは無いと思われるが、図2-10の固定支承の反力 $R_M$ はしばしば見られる集中モーメントである。

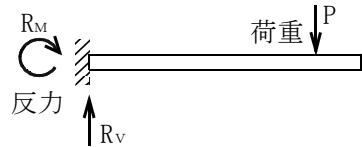


図2-10 固定支承の反力

##### [実験的な载荷]

図2-1の構造物に作用する荷重としての集中モーメントは、図2-11の上

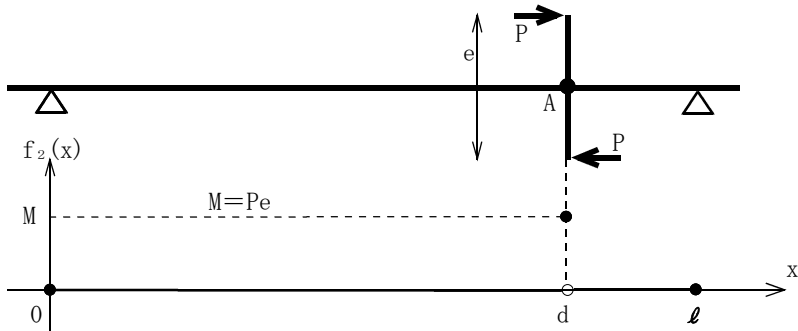


図2-11 全景眺望による集中モーメント

半の装置を用いて実験的に作用させることができる。図2-11の上半の梁の点Aに垂直に長さ $e$ の棒を取り付け、上端と下端に大きさ $P$ が同じで向きが反対の2つの力を作用させると、大きさ $M=Pe$ の集中モーメントが点Aに作用する。梁の材軸線に沿って座標 $x$ を設定し、点Aの座標 $x=d$ とする。荷重を表示する関数 $f_2(x)$ とすると、図2-11の下半のように図示され、式

2・21、式2・22で表される。

$$f_2(x) = 0 \quad (0 \leq x < d, d < x \leq \ell) \quad 2 \cdot 21$$

$$f_2(x) = M \quad (x = d) \quad 2 \cdot 22$$

関数 $f_2(x)$ の単位は集中モーメント $M$ の単位と同じ $Nm$ である。関数 $f_2(x)$ は眺望関数であり、定義域は区間 $0 \leq x \leq \ell$ である。

[詳細凝視]

図2-11を見ながら近付いて、点Aの近くを拡大して詳細に見ると、図2-12の上半のようなになる。2つのT型の荷重装置を用いて鉛直な棒BADCが梁に取り付けられている。水平な板EAFを下から、水平な板GDHを上から梁に押し当てている。集中モーメント $M$ を作用させると水平な板EAが変

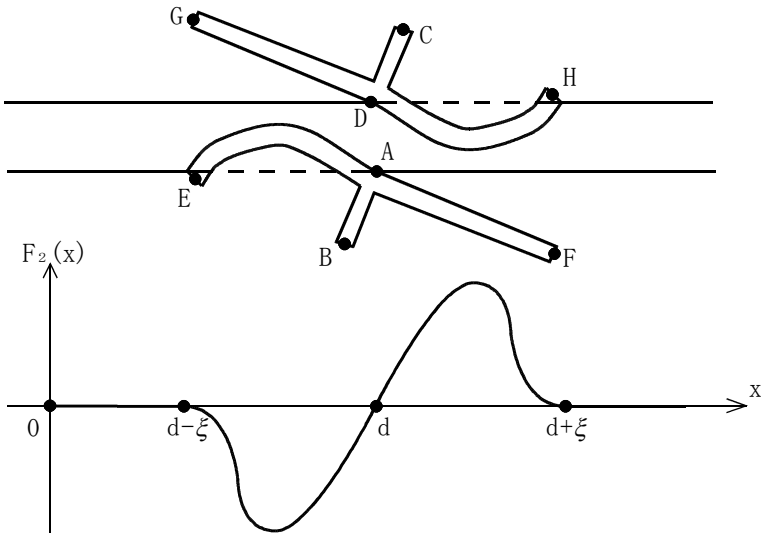


図2-12 詳細凝視による集中モーメント

形して図2-12の上半のような曲線になり、梁の下面も変形する。同様に水平な板DHが変形して曲線になり、梁の上面も変形する。曲線EAと曲線DHを介して荷重が荷重装置から梁に伝達される。点Eと点Gの座標 $x=d-\xi$ 、点Fと点Hの座標 $x=d+\xi$ であり、荷重は点域 $d-\xi \leq x \leq d+\xi$ に分布する力で、概形は図2-12の下半の関数 $F_2(x)$ のように図示される。関数 $F_2(x)$ の単位は $N/m$ であり、眺望関数 $f_2(x)$ の単位と異なっている。関数 $F_2(x)$ は凝視関

数であり、定義域は区間 $-\alpha \leq x \leq \theta + \beta$ である。点域 $d - \xi \leq x \leq d + \xi$ の外には分布力 $F_2(x)$ は分布しないので式2・23が成り立つ。

$$F_2(x) = 0 \quad (-\alpha \leq x \leq d - \xi, \quad d + \xi \leq x \leq \theta + \beta) \quad 2 \cdot 23$$

分布力 $F_2(x)$ の点 $x=d$ の周りのモーメントは点 $x=d$ における関数 $f_2(x)$ の値 $M$ と一致するから、式2・24が成り立ち、分布力 $F_2(x)$ の合力は0であるから、式2・25が成り立つ。

$$\int_{d-\xi}^{d+\xi} F_2(x) (x-d) dx = f_2(d) = M \quad 2 \cdot 24$$

$$\int_{d-\xi}^{d+\xi} F_2(x) dx = 0 \quad 2 \cdot 25$$

[同等な凝視関数]

図2-12の上半で梁と载荷装置の剛性が変わると曲線EAと曲線DHも変化する。曲線EAと曲線DHが異なれば、眺望関数 $f_2(x)$ が同じであっても、凝視関数 $F_2(x)$ は異なる。眺望関数 $f_2(x)$ と凝視関数 $F_2(x)$ の対応は1対多である。異なる凝視関数 $F_2(x)$ が同一の眺望関数 $f_2(x)$ に対応するとき、異なる凝視関数 $F_2(x)$ は互いに同等であると考えられる。

[全景眺望]

図2-12を見ながら遠ざかると、6点E、A、F、G、D、Hがだんだん重なって区別がつかなくなり、図2-11の上半の点Aのように見えてくる。視点移動により「図2-11の点 $x=d$ 」と「図2-12の区間 $d - \xi \leq x \leq d + \xi$ 」が対応するから、図2-11の点 $x=d$ は有域点である。

(5) 荷重の重ね合わせ

[足し算]

分布荷重、集中荷重、集中モーメントに分けて考察したが、図2-1には同時に作用しているから重ね合わせを考える。眺望関数 $f_0(x)$ 、 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ を重ね合わせた関数 $f(x)$ 、凝視関数 $F_0(x)$ 、 $F_1(x)$ 、 $F_2(x)$ を重ね合わせた関数 $F(x)$ とする。関数 $F_0(x)$ 、 $F_1(x)$ 、 $F_2(x)$ の3つは単位N/mが同じであるから、単純な足し算で重ね合わせを表現でき、式2・26のように書ける。



$$F(x) = F_0(x) + F_1(x) + F_2(x) \quad 2 \cdot 26$$

しかし、関数 $f_0(x)$ 、 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ は単位が同じでないので、単純な足し算では重ね合わせを表現することはできない。関数 $f(x)$ が関数 $F(x)$ と同じ単位N/mを持つと考え、単位を添えて足し算すると式2・27のように書け、両辺を単位N/mで割ると式2・28が得られる。

$$f(x)N/m = f_0(x)N/m + f_1(x)N + f_2(x)Nm \quad 2 \cdot 27$$

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)m + f_2(x)m^2 \quad 2 \cdot 28$$

[単位の異なる成分]

単位 $m$ は座標 $x$ の単位であり、座標 $x$ は図2-1、図2-2の中段と下段、図2-3～図2-9の下半、図2-11と図2-12の下半の横軸であるから、単位 $m$ は横軸単位である。単位 $m$ は長さの単位であるが、長さの単位には $cm$ も $km$ も尺も $foot$ もある。特定の単位の使用を避けて一般化するために、記号 $\updownarrow$ で式2・28の $m$ を置き換え、式2・29のように表示する。

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)\updownarrow + f_2(x)\updownarrow^2 \quad 2 \cdot 29$$

記号 $\updownarrow$ を横軸単位と呼ぶ。直交する座標軸を描き、数値1が単位であることから、横軸の数値1を示す位置に点・を記した図案から横軸単位の記号 $\updownarrow$ を作成した。式2・29を見ると単位1、 $\updownarrow$ 、 $\updownarrow^2$ を基底ベクトルとし、関数 $f_0(x)$ 、 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ を成分としたベクトル表現である。1が $\updownarrow^0$ を意味し、 $\updownarrow$ が $\updownarrow^1$ を意味するから、 $\updownarrow$ の指数0、1、2を成分の次数として、関数 $f_0(x)$ を第0次成分、関数 $f_1(x)$ を第1次成分、関数 $f_2(x)$ を第2次成分と言う。ベクトルと同じ形式で表すのであれば、式2・30のように点、で区切り、括弧 $\{$ で包んで表すことが考えられる。

$$f(x) = \{f_0(x), f_1(x), f_2(x)\} \quad 2 \cdot 30$$

[成分4個型の眺望関数]

式2・29に式2・7を代入すれば、式2・31が得られる。

$$f(x) = f_h(x) + f_d(x)\sqrt{\phantom{x}} + f_1(x)\updownarrow + f_2(x)\updownarrow^2 \quad 2 \cdot 31$$

式2・30に式2・6を代入すれば、式2・32が得られる。

$$f(x) = \{f_h(x), f_d(x), f_1(x), f_2(x)\} \quad 2 \cdot 32$$

凝視関数 $F(x)$ は定義域が $-\alpha \leq x \leq \theta + \beta$ の滑らかな関数である。眺望関数

$f(x)$ は左連続成分、段差成分、第1次成分、第2次成分の4つの成分から構成される定義域が $0 \leq x \leq \ell$ の関数である。式2・31の表現を関数擬値と呼び、式2・32の表現を関数配列と呼ぶ。

(6) 成分4個型を用いた荷重の表現

[分布荷重]

図2-3の下半の凝視関数を $F(x)$ で表し、図2-2の中段と下段の眺望関数を $f(x)$ で表し、式2・32の型の関数配列で表せば、式2・1、式2・2、式2・3、式2・4、式2・5は式2・33、式2・34、式2・35、式2・36で表される。

$$f(x) = (0, 0, 0, 0) \quad (0 \leq x < a, b < x \leq \ell) \quad 2 \cdot 33$$

$$f(x) = (0, W, 0, 0) \quad (x = a) \quad 2 \cdot 34$$

$$f(x) = (W, 0, 0, 0) \quad (a < x < b) \quad 2 \cdot 35$$

$$f(x) = (W, -W, 0, 0) \quad (x = b) \quad 2 \cdot 36$$

[集中荷重]

図2-7の下半の凝視関数を $F(x)$ で表し、図2-8の下半の眺望関数を $f(x)$ で表し、式2・32の型の関数配列で表せば、式2・16、式2・17は式2・37、式2・38で表される。

$$f(x) = (0, 0, 0, 0) \quad (0 \leq x < c, c < x \leq \ell) \quad 2 \cdot 37$$

$$f(x) = (0, 0, P, 0) \quad (x = c) \quad 2 \cdot 38$$

[集中モーメント]

図2-11の下半の凝視関数を $F(x)$ で表し、図2-12の下半の眺望関数を $f(x)$ で表し、式2・32の型の関数配列で表せば、式2・21、式2・22は式2・39、式2・40で表される。

$$f(x) = (0, 0, 0, 0) \quad (0 \leq x < d, d < x \leq \ell) \quad 2 \cdot 39$$

$$f(x) = (0, 0, 0, M) \quad (x = d) \quad 2 \cdot 40$$

### 第3章 数学的表現への変換

#### (1) 実在を確認しない凝視関数

[満足すべき条件]

式3・1、式2・18の関数 $F_1(x)$ は式2・18、式2・19、式2・20を満足し、区間 $c-v \leq x \leq c+v$ で無限回微分可能であり、2点 $x=c-v$ 、点 $x=c+v$ において式3・1と式2・18が滑らかに接続する。2点 $x=c-v$ 、点 $x=c+v$ における接続の状態に注目すると、式3・1、式2・18の関数 $F_1(x)$ は2回微分可能である。

$$F_1(x) = -P \frac{35}{32v^7} (x-c+v)^3 (x-c-v)^3 \quad (c-v \leq x \leq c+v) \quad 3 \cdot 1$$

$$F_1(x) = 0 \quad (-\alpha \leq x \leq c-v, c+v \leq x \leq \theta + \beta) \quad 2 \cdot 18(\text{再掲})$$

式3・1、式2・18の関数 $F_1(x)$ は式2・19、式2・20を満足し、滑らかに接続するが、図2-8のような力学的な検討を経ておらず、実在する凝視関数であることは確認されていない。式2・18、式2・19、式2・20は凝視関数が満足すべき条件であり、条件を満足すれば、実在を確認しなくとも、式2・37、式2・38の眺望関数 $f(x)$ と対応する凝視関数の1つと考えることにする。

[名称変更]

凝視関数から眺望関数に視点移動するとき、点半径 $v$ が捨象されるので見掛けは $v \rightarrow 0$ の極限のように見え、視点移動と極限変動は類似している。図2-8における力学的な検討において、点半径 $v$ は小さいけれども正の定数であり、路面や車輪の材質や荷重の大きさに従属する数値であった。式3・1の実在を確認しない場合には、点半径についても実在を確認しないで、視点移動の代用として、 $v \rightarrow 0$ の極限変動を考えることにする。視点移動の代用として極限変動を考えるとき、式3・1のように数式化されていることも重要である。図2-8で凝視関数 $F_1(x)$ を考えた(9頁参照)とき、数式化しなかった。路面や車輪の弾性係数や荷重の大きさを与えて考察すれば、数式化も不可能ではないと思われるが、式3・1のような単純な数式にはならないと思われ、数式化を断念していた。式3・1のような単純な数式であれば、式2・19、式2・20の計算も簡単に行うことができ

る。視点移動の代用として点半径の極限変動を考えると、点半径の性質が定数から補助変数に変わるので、点半径変数と呼び変えることにする。図2-1の点 $x=a$ 、 $x=c$ 、 $x=d$ 、 $x=0$ 、 $x=l$ における点半径について、小さいけれど大きさの異なる定数と考えると、異なる文字 $\mu$ 、 $\nu$ 、 $\xi$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ を用いたが、点半径変数は極限変動するから原則として同じ文字 $\rho$ を用い、極限変動 $\rho \rightarrow 0$ を考えることにする。視点移動を極限変動で置き換えることに伴い、凝視関数を近似関数に名称変更し、眺望関数を超関数に名称変更する。超関数は成分表示し、関数擬値または関数配列で表す。有域点を特異点に名称変更する。式3・1、式2・18の関数 $F_1(x)$ を点半径変数 $\rho$ を用いて式3・2、式3・3の関数 $F(x)$ のように書き換える。

$$F(x) = -P \frac{35}{32\rho^7} (x-c+\rho)^3 (x-c-\rho)^3 \quad (c-\rho \leq x \leq c+\rho) \quad 3\cdot2$$

$$F(x) = 0 \quad (-\rho \leq x \leq c-\rho, c+\rho \leq x \leq \ell+\rho) \quad 3\cdot3$$

式3・2、式3・3の関数 $F(x)$ は式2・37、式2・38の超関数 $f(x)$ と対応する近似関数の1つと考えることにする。式3・2の関数 $F(x)$ は式3・4、式3・5を満足し、区間 $c-\rho \leq x \leq c+\rho$ で無限回微分可能であり、2点 $x=c-\rho$ 、点 $x=c+\rho$ で式3・3と滑らかに接続する。

$$\int_{c-\rho}^{c+\rho} F(x) dx = P \quad 3\cdot4$$

$$\int_{c-\rho}^{c+\rho} F(x) (x-c) dx = 0 \quad 3\cdot5$$

2点 $x=c-\rho$ 、点 $x=c+\rho$ における接続の状態に注目すると、式3・2、式3・3の関数 $F(x)$ は2回微分可能である。

## (2) 有限回微分可能な近似関数

[2n次関数で表された近似関数]

式3・3、式3・6の関数 $F(x)$ は図3-1で表され、式3・4、式3・5を満足し、区間 $c-\rho \leq x \leq c+\rho$ で無限回微分可能であり、2点 $x=c-\rho$ 、点 $x=c+\rho$ において式3・3と式3・6が滑らかに接続する。式3・3、式3・6の関数 $F(x)$ は式2・37、式2・38の超関数 $f(x)$ の近似関数である。

$$F(x) = P \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1} \rho^{2n+1}} (x-c-\rho)^n (x-c+\rho)^n \quad (c-\rho \leq x \leq c+\rho) \quad 3 \cdot 6$$

$$F(x) = 0 \quad (-\rho \leq x \leq c-\rho, \quad c+\rho \leq x \leq \ell+\rho) \quad 3 \cdot 3 \text{ (再掲)}$$

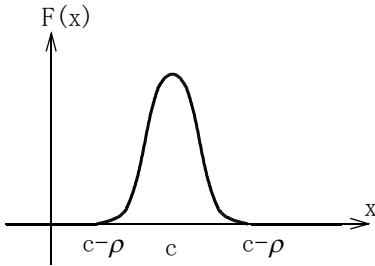


図3-1 2n次の近似関数F(x)

近似関数F(x)が微分可能なとき、超関数f(x)が微分可能と考える。超関数f(x)は必ずしも無限回微分可能である必要はない。式3・6にn=3を代入すると式3・2が得られる。式3・2、式3・3の近似関数F(x)は2点x=c-ρ、点x=c+ρにおける接続の状態に注目すると、滑らかに接

続し、2回微分可能である。理論展開の中で2階導関数が用いられるならば、式3・2、式3・3の近似関数F(x)を用いる。理論展開の中で更に高階の微分が必要になったときには、式3・6、式3・3の近似関数F(x)を用い、微分可能回数がn-1になるようにnを定める。式3・6、式3・3の近似関数F(x)は有限回微分可能であるが、任意にnを定めることができるから、事実上の無限回微分可能と考えて良い。

### (3) 超関数の定義

[定義域についての一般化]

式2・37、式2・38の超関数f(x)については図2-1の単純梁を想定しているから、超関数f(x)の定義域は区間0 ≤ x ≤ ℓである。

$$f(x) = (0, 0, 0, 0) \quad (0 \leq x < c, \quad c < x \leq \ell) \quad 2 \cdot 37 \text{ (再掲)}$$

$$f(x) = (0, 0, P, 0) \quad (x = c) \quad 2 \cdot 38 \text{ (再掲)}$$

図2-1の単純梁の両側に続く長い道路を想定し、座標xを道路の中心線に沿って延長すれば、超関数f(x)の定義域を区間0 ≤ x ≤ ℓより広げることができ、任意の実数a、bや記号-∞、+∞を区間の端点として用いることができる。集中力f(x)を超関数f(x)と名称変更し、表3=1に示す下端の表示と上端の表示で独立変数xを挟んで、超関数f(x)の定義域をa ≤ x < b、a ≤ x < +∞のように表示する。近似関数F(x)は構造力学における図1-3、

表3=1 超関数の定義域の端点

下端の表示	上端の表示
$a \leq$	$\leq b$
$a <$	$< b$
$-\infty <$	$< +\infty$

表3=2 近似関数の定義域の端点

下端の表示	上端の表示
$a-\rho \leq$	$\leq b+\rho$
$a+\rho \leq$	$\leq b-\rho$
$-\infty <$	$< +\infty$

図1-8、図1-12の凝視関数の性質を引き継ぐので、特に言及しなければ、近似関数 $F(x)$ は定義域の全域において少なくとも1回微分可能であると想定する。近似関数 $F(x)$ と超関数 $f(x)$ を関連付けるために点半径変数 $\rho$ を用いる。表3=2示す下端の表示と上端の表示で独立変数 $x$ を挟んで近似関数 $F(x)$ の定義域を $a-\rho \leq x \leq b-\rho$ 、 $a-\rho \leq x < +\infty$ のように表示する。表3=1の $a \leq$ と表3=2の $a-\rho \leq$ が対応し、表3=1の $a <$ と表3=2の $a+\rho \leq$ が対応している。

[成分数についての一般化]

式2・31の型(15頁参照)の関数擬値や式2・32の型(15頁参照)の関数配列を荷重の分布の表現に用いると成分4個型である。一般化して、成分数が任意の自然数となるような超関数を考えることができる。普通の連続関数は左連続成分 $f_h(x)$ だけを成分とする成分1個型の超関数と考えることができる。図2-2の中段と下段の関数 $f_o(x)$ は成分2個型の超関数と考えることができる。成分数が3個以上の時は式3・7または式3・8のように $n+2$ 個の成分を組み合わせて表す。

$$f(x) = \{f_h(x), f_d(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} \quad 3 \cdot 7$$

$$f(x) = f_h(x) + f_d(x) \uparrow + f_1(x) \uparrow + f_2(x) \uparrow^2 + \dots + f_n(x) \uparrow^n \quad 3 \cdot 8$$

成分無限個型の超関数も考えることができる。成分数の異なる超関数を比べるときは推認操作が必要である。式3・7で定義される成分 $n+2$ 個型の超関数 $f(x)$ と式3・9で定義される成分 $n+m+2$ 個型の超関数 $g(x)$ を比較する。

$$f(x) = \{f_h(x), f_d(x), f_1(x), \dots, f_n(x)\} \quad 3 \cdot 7(\text{再掲})$$

$$g(x) = \{g_h(x), g_d(x), g_1(x), \dots, g_n(x), g_{n+1}(x), \dots, g_{n+m}(x)\} \quad 3 \cdot 9$$

差に相当する成分 $g_{n+1}(x), \dots, g_{n+m}(x)$ について、任意の値をとると考える任意値推認と値0をとると考える零値推認のいずれか適切な方法を選ぶ。

[判別条件]

超関数 $f(x)$ の成分と近似関数 $F(x)$ を式3・10～式3・13で関連付ける。

$$f_h(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} F(x-\rho) \quad 3 \cdot 10$$

$$f_d(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \{F(x+\rho) - F(x-\rho)\} \quad 3 \cdot 11$$

$$f_1(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{x-\rho}^{x+\rho} F(t) dt \quad 3 \cdot 12$$

.....

$$f_n(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x-\rho}^{x+\rho} (t-x)^{n-1} F(t) dt \quad 3 \cdot 13$$

特異点だけでなく通常点についても式3・10～式3・13を適用する。近似関数 $F(x)$ の区間 $c-\rho \leq x \leq c+\rho$ を超関数 $f(x)$ の点 $x=c$ の点域と呼ぶ。超関数の点と近似関数の点域を同一視する。式3・13の左辺の添え字の $n$ と右辺の冪指数 $n-1$ がずれていることに注意する。式3・10～式3・13を式3・7または式3・8に代入して超関数 $f(x)$ を定義する。

$$f(x) = \{f_h(x), f_d(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} \quad 3 \cdot 7(\text{再掲})$$

$$f(x) = f_h(x) + f_d(x) \updownarrow + f_1(x) \updownarrow + f_2(x) \updownarrow^2 + \dots + f_n(x) \updownarrow^n \quad 3 \cdot 8(\text{再掲})$$

逆に式3・7または式3・8が与えられたとき、式3・10～式3・13は多数の同様な近似関数 $F(x)$ が満足すべき判別条件である。

[超関数の極限]

超関数 $f(x)$ の極限は式3・14、式3・15を意味する。

$$f(x-0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} f(x-\zeta) \quad 3 \cdot 14$$

$$f(x+0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} f(x+\zeta) \quad 3 \cdot 15$$

通常点は連続的に存在するので、通常点 $x$ における極限の計算において、点 $x-\zeta$ と点 $x+\zeta$ の変動範囲は通常点であり、極限の左連続成分以外の成分は全て0である。特異点は離散的に存在するので、特異点 $x$ における極限の計算において、点 $x-\zeta$ と点 $x+\zeta$ の変動範囲は通常点であり、極限の左連続成分以外の成分は全て0である。点 $x$ が特異点であっても通常点であっても、極限の左連続成分以外の成分は全て0である。極限の左連続成分については、式3・16、式3・17が成り立つ。

$$f_h(x-0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} F(x-\rho) = f_h(x) \quad 3 \cdot 16$$

$$\begin{aligned} f_h(x+0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} F(x+\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \{F(x+\rho) - F(x-\rho)\} + \lim_{\rho \rightarrow 0} F(x-\rho) \\ &= f_d(x) + f_h(x) = f_h(x) + f_d(x) \end{aligned} \quad 3 \cdot 17$$

左連続成分以外の成分は全て0であり、式3・16が成り立つから、関数配列表示すれば、式3・18が得られる。

$$f(x-0) = \{f_h(x), 0, 0, 0, 0, \dots\} \quad 3 \cdot 18$$

左連続成分以外の成分は全て0であり、式3・17が成り立つから、関数配列表示すれば、式3・19が得られる。

$$f(x+0) = \{f_h(x) + f_d(x), 0, 0, 0, 0, \dots\} \quad 3 \cdot 19$$

擬値表示すれば数値が0である成分が書かれないので、式3・18は式3・20のように書かれ、式3・19は式3・21のように書かれる。

$$f(x-0) = f_h(x) \quad 3 \cdot 20$$

$$f(x+0) = f_h(x) + f_d(x) \quad 3 \cdot 21$$



## 第4章 詳細版への誘い

### [不満や疑問]

第2章と第3章を読んで不満や疑問を抱かなかった読者は、成分表示型の超関数について理解した。詳細版を読む必要はない。しかし、不満や疑問を抱いた読者も多いだろう。成分表示型の超関数の理論の粗筋を知ってもらうために、裾野無型版はかなり多くの記述を省略してある。裾野無型版を読んで不満や疑問を抱いた読者は詳細版の各々の個所を読めば納得すると思う。

### [荷重分布の表現]

詳細版も裾野無型版も単位の異なる3種類の荷重を統合して考察することから議論を始めている。裾野無型版では区間における荷重の合計、区間におけるモーメントの合計についての説明を省略してある。

### [汎関数型の理論]

超関数の初歩を学んだ読者は、式4・1が説明されないことに疑問を感じるだろう。

$$\Delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \quad 4\cdot 1$$

歴史的な経緯もあって、汎関数型の理論では式4・1が必ず説明される。式4・1を用いなくとも、式3・6、式3・3の近似関数 $F(x)$ を用いれば、集中力を表す超関数を定義することができ、式4・1を用いるより簡単である。汎関数型の理論について、詳細版の第2章に記述してある。

### [数学的表現への変換]

第2章で説明した複視点関数について、第3章において唐突に数学的な表現に変換することに疑問を抱いた読者は、詳細版の第3章を見れば納得すると思う。複視点関数と汎関数型の超関数を比較するために、表現の統一を試みた。

### [成分表示型の理論]

超関数の定義、超関数の演算、基本関数、超関数と分布の関係について、成分表示型の理論を詳細版の第4章に記述してある。

#### [整冪多項式で表された近似関数]

式3・2、式3・6は整冪多項式であり、初歩の技術者にとっても取り扱いが簡単である。式3・6を着想した事情について詳細版の第5章に記述してある。

#### [裾野]

裾野有型の近似関数は、初級の技術者にとって計算が難しい。裾野無し型版では裾野有型の近似関数について言及を避けた。詳細版の第6章に裾野について記述してある。

#### [不連続関数]

関数の不連続点について、関数の一義性と関連させて、詳細版の第7章に記述してある。

#### [点の内部変動]

成分表示型の理論において、近似関数の区間 $a-\rho \leq x \leq a+\rho$ と超関数の点 $x=a$ を同一視する。点域 $a-\rho \leq x \leq a+\rho$ における近似関数の激しい変動が超関数の特異点 $x=a$ の性質をもたらす。点域 $a-\rho \leq x \leq a+\rho$ における近似関数の変動について、詳細版の第8章に記述してある。

#### [成分4個型]

質量の分布について詳細版の第10章に記述してある。質量分布は一見すると成分3個型と思われるが、詳細に検討すると成分4個型である。質量モーメントが0になるように重心位置が決定される。質量モーメントは常に0であるので、物理量としての認識が薄いのが、詳細に検討すれば、物理量であると気付く。成分5個以上型の現象は見当たらない。

## 著者略歴

小林保

1949年長野市に生まれる。

1968年名古屋工業大学土木科に入学。

1974年建設省に就職。

余暇に数学や力学の研究を続ける。

2003年ダイヤコンサルタントに就職。

成分表示型の超関数

—裾野無型の近似—

2011年10月 5日 執筆着手

2011年12月17日 初版発行

著者 小林保

発行 小林保