第7章　不連続関数

(1)　関数の萌芽

[質点の落下]

関数と言う考え方が意識的に用いられ始めたのは西暦1700年頃のヨーロッパにおいてである。ニュートンを中心とする学派やライプニッツを中心とする学派が微分や積分を考察の対象に取り入れたとき、関数という用語が生まれた。最初に考えられた関数は一次関数と二次関数である。小石を持って手放すと落下する。x(s)後の小石の位置が手からy(m)下であるとすると式7･1が成り立つ。

$$y=4.9\times x^2 \qquad 7\cdot1$$

式7･1は式7･2でg＝9.8(m/s^2)を代入して得られる。定数gは重力加速度である。

$$y=\frac{1}{2}\cdot g\cdot x^2 \qquad 7\cdot2$$

このときの下向きの速度をv(m/s)とすると、式7･3が成り立つ。

$$v=9.8\times x \qquad 7\cdot3$$

式7･3を積分すると式7･1が得られる。小石の大きさを捨象して重心が小石の位置を代表すると考えるとき、小石を質点と呼ぶ。質点の落下を考察するときの式7･3が一次関数、式7･1が二次関数である。質点を地上10mの位置から落下させると、式7･4のように計算され、1.43(s)後には地表に衝突して停止する。

$$10=4.9\times x^2$$

$$x=\sqrt{10\div4.9}=1.43(s) \qquad 7\cdot4$$

変数xは0≦x≦1.43の範囲で変動し、変数yは0≦y≦10の範囲で変動する。区間0≦x≦1.43を定義域、区間0≦y≦10を値域と言う。

[引力]

2つの質点の距離xとするとき、2つの質点間に式7･5の引力y(N)が作用する。

$$y=K\cdot\frac{1}{x^2} \qquad 7\cdot5$$

万有引力定数G＝6.67×10^{-11}(m^{3}s^{-2}kg^{-1})、2つの質点の質量をm_1(kg)、m_2(kg)とすると、式7･6が成り立つ。

$$y=G\cdot m_1\cdot m_2\cdot\frac{1}{x^2} \qquad 7\cdot6$$

式7･6で式7･7とすると、式7･5が得られる。

$$K=G\cdot m_1\cdot m_2 \qquad 7\cdot7$$

引力yは距離xの関数である。2つの質点が半径r_1(m)と半径r_2(m)の球であるとすると、xはr_1+r_2より小さくなることはできず、区間$r_1+r_2\leqq x<+\infty$が定義域である。

(2)　関数の定義

[独立変数を含む計算式]

関数という考え方が最初に意識されたのは、式7･3の一次関数や式7･1の二次関数である。式7･3や式7･1を一般化すると、n+1個の定数a_n、・・・、a_1、a_0を用いて式7･8のような整冪多項式が得られる。

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad 7\cdot8$$

式7･8は変数xを含む計算式である。式7･5の分数関数や式7･9の指数関数も変数xを含む計算式である。

$$y=3^x \qquad 7\cdot9$$

初期には変数xを含む計算式が関数であると定義された。二次関数と分数関数を組み合わせた式7･10も変数xを含む計算式であり、関数である。

$$y=\frac{1}{x^2+4x+5} \qquad 7\cdot10$$

変数xを含む計算式が関数であると定義された場合、関数は連続で微分可能である。

[独立変数と従属変数の対応]

図7-1のように点Aを中心にして半径ABの円を描き、円周上に点Cをとり、∠BAC＝xとし、点Cから直線ABに垂線CDを描く。式7･11、式7･12、式

7・13が三角関数の定義である。

$y=\sin x=\dfrac{CD}{AC}$　　7・11

$y=\cos x=\dfrac{AD}{AC}$　　7・12

$y=\tan x=\dfrac{CD}{AD}$　　7・13

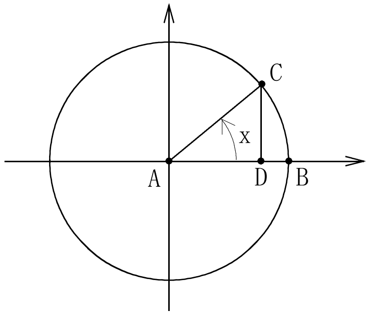

図7-1　三角関数の定義

三角関数は計算式で定義されている訳ではない。図7-1、式7・11、式7・12、式7・13は変数xから変数yを求める規則を記述している。関数が三角関数を含むように関数の定義を変更し、変数xから変数yを求める規則が関数であると定義することが提案された。独立変数xから従属変数yへの対応が関数である。

[同格でない変数]

　独立変数xの値が1つ決められると、対応する従属変数yの値が1つ決まるような規則が関数である。しかし、従属変数yの値が1つ決められても、独立変数xの値が1つ決まる訳ではない。式7・14の三次関数は図7-2のように図示される。

$y=x^3-x+2$　　7・14

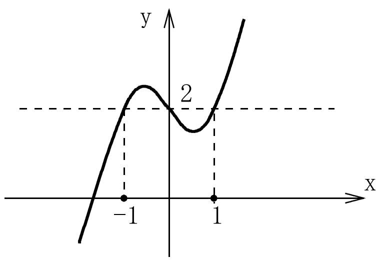

図7-2　三次関数の例

変数xの値が1つ決まると変数yの値が1つ決まるが、変数yの値がy＝2と決まると変数xの値はx＝-1、x＝0、x＝1の3つあり、1つに決まらない。変数xから変数yへの対応であって、変数yから変数xへの対応ではない。変数xと変数yは同格ではなく、変数xは独立、変数yは従属と形容されている。変数xの値が決められたとき、変数yの値を迷うことなく決めることができれば、それが関数である。

[複数の計算式]

　式7・5、式7・8、式7・9、式7・10のような計算式に独立変数xを代入する

と従属変数yが計算されるから、計算式も規則である。対応の規則が関数であると定義すると、複数の計算式を用いて関数を定義することができる。式2・2、式2・3、式2・6の関数f(x)は3つの計算式で定義されているが、変数xの値が決まると変数xの値に応じて、計算式に括弧書きで注記された区間に従い、いずれの計算式を適用すべきかが決まり、迷うことなく変数yの値を決めることができる。

$f(x)=\dfrac{1}{2}x$　　$(-\infty<x<2)$　　2・2(再掲)

$f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$　　$(2<x<+\infty)$　　2・3(再掲)

$f(x)=2$　　$(x=2)$　　2・6(再掲)

式2・6も点x＝2に対応する変数yの値を決めており、計算式と考えて差し支えない。式2・2、式2・3、式2・6の関数f(x)は点x＝2において不連続である。

　式5・31、式5・32の関数f(x)は2つの計算式で定義されている。

$f(x)=0$　　$(-\infty<x\leqq 0)$　　5・31(再掲)

$f(x)=x$　　$(0\leqq x<+\infty)$　　5・32(再掲)

括弧書きで註記された区間の両方に点x＝0が含まれており、点x＝0についていずれの計算式を適用すべきか迷うが、両式でf(0)を計算すると一致するから、結果的には従属変数yを迷うことなく決めることができる。式5・31、式5・32の関数f(x)は点x＝0において連続である。

[連続な点が全く無い関数]

　独立変数xから従属変数yへの対応関係が関数であると定義した場合、式7・15、式7・16の関数f(x)のように、連続な点が全く無いような規則も関数に含まれる。

$f(x)=1$　　(xが有理数)　　7・15

$f(x)=0$　　(xが無理数)　　7・16

[定義域]

　独立変数xから従属変数yへの対応関係が関数であるから、独立変数xの値を決めたとき、対応する変数yが決まらないならば、その点は定義域外

であり、考察の対象外である。式7･1、式7･3のように質点の落下を考察したときや、式7･5のように引力を考察したときには、考察対象の現象の性質から、定義域が区間$0 \leqq x \leqq 1.43$や区間$r_1+r_2 \leqq x < +\infty$のように決定される。具体の現象の考察から離れて数学的に関数を考察するときは原則として、区間$-\infty < x < +\infty$を定義域にする。式7･8の整冪多項式、式7･9の指数関数、式7･11の正弦関数、式7･12の余弦関数は、区間$-\infty < x < +\infty$を定義域にしても良い。しかし、式7･5は$x=0$とすると計算できないから、点$x=0$を定義域に含むことはできない。引力を考察したときには、定義域が区間$r_1+r_2 \leqq x < +\infty$のように決定され、点$x=0$が除外されていた。具体の現象の考察から離れて数学的に関数を考察するときにも、計算不能のために定義域から除外する必要がある場合に注意すべきである。実数の範囲で考えると、式7･17の対数関数の定義域は区間$0 < x < +\infty$であり、式7･18の無理関数の定義域は区間$0 \leqq x < +\infty$である。

$y = \log x \qquad (0 < x < +\infty) \qquad$ 7･17

$y = \sqrt{x} \qquad (0 \leqq x < +\infty) \qquad$ 7･18

式7･13の正接関数は$x = \cdots、-\frac{\pi}{2}、\frac{\pi}{2}、x = \frac{3\pi}{2}、x = \frac{5\pi}{2}、\cdots$の各点が定義域外である。

[完全に対応させる関数の定義]

変数xの値が決まるとそれに応じて変数yの値が決まる規則が関数の定義である。独立変数xから従属変数yへ完全に対応させる定義である。変数xに対して変数yが一義的に決まるので、関数の一義性と言う。関数が用いられ始めた初期には、独立変数xを含む計算式が関数であると定義されていた。関数についての理解が深まってくると、関数についての定義が修正され、独立変数xから従属変数yへ対応させる規則が関数であると定義された。計算式は変数xを代入すると、計算によって変数yが計算されるから、変数xから変数yへ対応させるという性質を持っていた。関数についての定義が修正されても、関数の一義性は失われなかった。

(3)　区分的に連続な関数

[考察対象の絞り込み]

工学や物理学の現象を記述するために用いられる関数は、式7･1、式7･3、式7･5のように連続関数が多い。式7･15、式7･16のように、連続な点が全く無い関数を用いて記述する現象は見当たらないから、考察の対象から除外する。不連続な関数であっても、式2･2、式2･3、式2･6の関数f(x)は点$x=2$以外の区間で連続である。不連続点$x=2$で区分された2つの区間$-\infty < x < 2$と$2 < x < +\infty$の各々において連続である。式2･2、式2･3、式2･6のような関数は区分的に連続(72頁参照)である。不連続関数については、考察の対象を区分的に連続な関数に限定する。

[例]

式2･2、式2･3、式7･19の関数のf(x)は図7-3のように図示される。

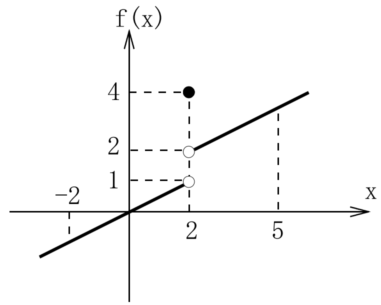

図7-3　点x＝2は定義域内

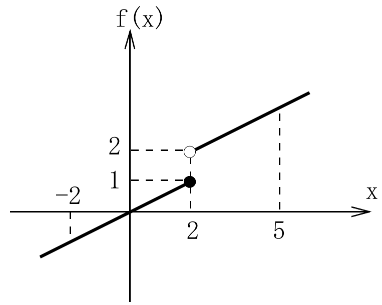

図7-4　点x＝2は定義域内

$f(x) = 4 \qquad (x=2) \qquad$ 7･19

式2･2、式2･3、式7･20の関数のf(x)は図7-4のように図示される。

$f(x) = 1 \qquad (x=2) \qquad$ 7･20

図2-2(27頁参照)の関数f(x)、図7-3の関数f(x)、図7-4の関数f(x)は定義域が同じ区間$-\infty < x < +\infty$であるが、点$x=2$における関数値が異なっており、異なる関数である。式2･2、式2･3、式2･4の関数f(x)は図2-1のように図示(27頁参照)される。図2-1の関数f(x)は点$x=2$が定義域外であり、図2-2の関数f(x)、図7-3の関数f(x)、図7-4の関数f(x)と定義域が異なっており、異なる関数である。

[例]

式7・21、式7・22の関数のf(x)は図7-5のように図示される。

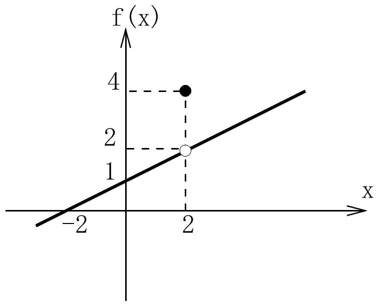

図7-5　点x＝2は定義域内

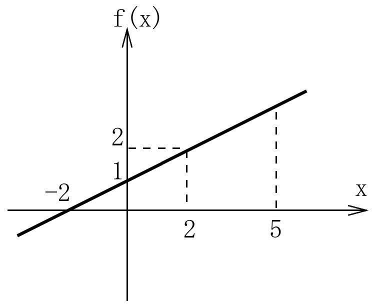

図7-6　点x＝2は積分可能

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1 \qquad (x\neq 2) \qquad 7\cdot 21$$

$$f(x)=4 \qquad (x=2) \qquad 7\cdot 22$$

式7・21、式7・23の関数のf(x)は図7-6のように図示される。

$$f(x)=2 \qquad (x=2) \qquad 7\cdot 23$$

図7-5の関数f(x)と図7-6の関数f(x)の定義域は同じ区間$-\infty<x<+\infty$であるが、点x＝2における関数値が異なっており、異なる関数である。式7・21、式2・4の関数のf(x)は図7-7のように図示される。

$$f(x)=(\text{不定義}) \qquad (x=2) \qquad 2\cdot 4(\text{再掲})$$

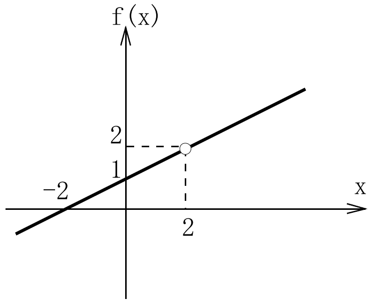

図7-7　点x＝2は定義域外

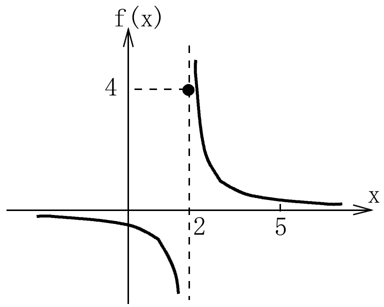

図7-8　点x＝2は定義域内

図7-7の関数のf(x)は、点x＝2が定義域外であり、図7-5の関数f(x)、図7-6の関数f(x)と定義域が異なっており、異なる関数である。

[例]

式2・8、式7・22の関数f(x)は図7-8のように図示される。

$$f(x)=\frac{1}{x-2} \qquad 2\cdot 8(\text{再掲})$$

図7-8の関数f(x)の定義域は区間$-\infty<x<+\infty$であり、点x＝2が定義域内である。図7-8の関数f(x)と図2-3(28頁参照)の関数f(x)は定義域が異なっており、異なる関数である。

(4)　不連続関数についての関数の定義の修正

[積分の可逆性]

関数f(x)について原始関数g(x)を式7・24のように定義する。

$$g(x)=\int_0^x f(x)\,dx \qquad 7\cdot 24$$

連続関数f(x)について、式7・24の積分で原始関数g(x)を定義し、関数g(x)を微分すれば元の関数f(x)が得られる。連続関数については、積分と微分を引き続き行ったとき、元の関数が得られ、積分の可逆性がある。図7-3の関数f(x)について式7・25、式7・26のように計算される。

$$g(x)=\int_0^x \frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{4}[x^2]_0^x=\frac{1}{4}x^2 \qquad (-\infty<x\leqq 2) \qquad 7\cdot 25$$

$$g(x)=\int_0^2 \frac{1}{2}x\,dx+\int_2^x\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=\frac{1}{4}[x^2]_0^2+\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_2^x$$

$$=\frac{1}{4}(4-0)+\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+x\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot 4+2\right)\right\}=\frac{1}{4}x^2+x-2 \qquad (2\leqq x<+\infty) \qquad 7\cdot 26$$

式7・25、式7・26のいずれを用いて計算しても、点x＝2における関数値g(2)は同じ結果が得られ、関数g(x)は点x＝2において連続である。式7・25、式7・26の関数g(x)を微分すると、点x＝2が微分不能であり、図2-1の関数f(x)が得られ、図7-3の関数f(x)は得られない。図2-2の関数f(x)、図7-4の関数f(x)についても事情は同じである。不連続関数については、積分と微分を引続き行ったとき、元の関数が得られず、積分の可逆性がない。

[対応の不完全を許容する関数の定義]

積分の可逆性が維持されるように、不連続関数について関数の定義を修正する。図2-1の関数f(x)、図2-2の関数f(x)、図7-3の関数f(x)、図7-4の関数f(x)の4つの関数を区別せずに、同じ関数と認識する。独立変数xから従属変数yへの対応の不完全を許容する定義である。点x＝2における関数値f(2)が1つにお決まらず、2、4、1のいずれの値にもなり得るし、不定義にもなり得る。不連続点においては関数の一義性を放棄する。図2-1の関数f(x)、図2-2の関数f(x)、図7-3の関数f(x)、図7-4の関数f(x)の4つの関数を区別すれば、不連続関数についても、関数の一義性が維持される。不連続関数について考察するときは、関数の一義性を維持する場合と関数の一義性を放棄する場合があるから注意が必要である。一義性を維持する場合が完全に対応させる定義であり、一義性を放棄する場合が対応の不完全を許容する定義である。対応の不完全を許容する定義においては、図7-5の関数f(x)、図7-6の関数f(x)、図7-7の関数のf(x)の3つの関数を区別せずに、同じ関数と認識する。図2-3の関数f(x)、図7-8の関数f(x)の2つの関数を区別せずに、同じ関数と認識する。汎関数型の超関数において、不連続関数を扱うときは、対応の不完全を許容する関数の定義が用いられる。

[従来の記述]

図1-1の分布荷重についての従来の記述は、式1･8、式1･9のように不連続点x＝a、x＝bについて言及(4頁参照)を避けている。図1-14の剪断力についての従来の記述は、式1･66、式1･67のように集中力の作用点x＝0、x＝a、x＝ℓについて言及(23頁参照)を避けている。言及を避けている点については、明示的な説明はないが、対応の不完全を許容する関数の定義が用いられており、関数の一義性が放棄されていると推察される。

[失われた性質]

定義の修正によって新たに付加される性質もあるが、失われる性質もある。失われる性質が重要でないならば、付加される性質によって、関数が一般化され、理論の見通しが良くなり、定義の修正は理論の発展に寄与する。関数の性質の中でも特段に重要で基本的な性質が失われれば、

最早、定義の修正ではなく、別個の概念に変質してしまう。対応の不完全を許容する定義を導入したときは、不連続関数について積分の可逆性が新たに追加されたが、関数の一義性が失われた。対応の不完全を許容する定義を用いるときは、関数の一義性は重要でないと評価されている。関数の萌芽期に式7･1のように1個の計算式が関数を定義していたが、図7-1、式7･11のように図を用いて関数を定義する場合や式2･2、式2･3、式2･6のように複数の計算式が関数を定義する場合を含むように、関数の定義を修正したときには、関数の一義性(147頁参照)は失われなかった。

(5)　一義性が失われたために生じた傾向

[ヘビサイド関数]

ヘビサイド関数η(x)は式2･70、式2･72によって定義される超関数である。式2･72の積分区間が点x＝0を含むので、点x＝0は定義域に含まれる。点x＝0以外の区間について、ヘビサイド関数η(x)は式2･119、式2･114で表される普通の関数と等しい。

η(x)＝0　　　(-∞＜x＜0)　　　2･119(再掲)

η(x)＝1　　　(0＜x＜+∞)　　　2･114(再掲)

完全に対応させる関数の定義だけが知られていたときには、定義域内の点x＝0における関数値η(0)に言及されないことは不都合なことであった。関数値η(0)を決定するか、点x＝0を定義域外にするか迫られる。対応の不完全を許容する関数の定義が認知されるようになると、関数値η(0)に言及されなくとも不都合なことではなくなった。関数値η(0)に言及しないことが普通のことになった。

[ディラック関数]

ディラック関数δ(x)は式2･58、式2･60によって定義される超関数である。式2･60の積分区間が点x＝0を含むので、点x＝0は定義域に含まれる。点x＝0以外の区間について、ディラック関数δ(x)は式2･134で表される普通の関数と等しい。

δ(x)＝0　　　(x≠0)　　　2･134(再掲)

完全に対応させる関数の定義だけが知られていたときには、定義域内の

点x＝0における関数値$\delta(0)$に言及されないことは不都合なことであった。関数値$\delta(0)$を決定するか、点x＝0を定義域外にするか迫られる。対応の不完全を許容する関数の定義が認知されるようになると、関数値$\delta(0)$に言及されなくとも不都合なことではなくなった。関数値$\delta(0)$に言及しないことが普通のことになった。

［分数関数］

主値を用いると式2･76の広義積分が収束し、式2･77の汎関数が存在するので、式2･8の分数関数f(x)をそのままで超関数と見なす場合(55頁参照)がある。

$$f(x)=\frac{1}{x-2} \qquad 2\cdot8\text{(再掲)}$$

式2･76の積分区間が点x＝2を含むので、点x＝2は定義域に含まれる。点x＝2以外の区間について、超関数f(x)は式2･8で表される普通の関数と等しい。完全に対応させる関数の定義だけが知られていたときには、定義域内の点x＝2における関数値f(2)に言及されないことは不都合なことであった。関数値f(2)を決定するか、点x＝2を定義域外にするか迫られる。対応の不完全を許容する関数の定義が認知されるようになると、関数値f(2)に言及されなくとも不都合なことではなくなった。関数値f(2)に言及しないことが普通のことになった。

［分布の一義性］

分布は、いずれも、分布の場から分布する量への対応であるから、分布の場と分布する量を明示する必要がある。分布の場を独立変数、分布する量を従属変数とすれば、関数が分布を表すことができる。分布の場の点を1つ決めると、分布する量が1つ存在している。分布する量が複数個存在したり、全く存在しなかったりすれば、最早、分布ではない。分布の場と分布する量の対応の状況を、分布の一義性と呼ぶ。関数と異なり、分布は数学的な概念ではない。分布は物理学や工学における現象を記述する概念であり、分布の一義性は現象の性質に由来する。分布の場を独立変数で表し、分布する量を従属変数で表すと関数が分布を表す。関数を用いて分布を表すときは、分布の一義性に対応して、関数も一義

性を持たなければならない。超関数の萌芽期における歴史から、汎関数型の超関数が分布を表すと考えられている。超関数を用いて分布を表すときは、分布の一義性に対応して、超関数も一義性を持たなければならない。特異点x＝0における超関数の関数値$\eta(0)$、特異点x＝0における超関数の関数値$\delta(0)$、特異点x＝2における式2･8の超関数の関数値f(2)に言及しなければならない。

(6)　関数の定義の修正の別の方法

［段差点］

図1-2の上段の直方体ABCDの塊による荷重$f_o(x)$は、区間EAで一定値0、点Aで急増し、区間ABで一定値W、点Bで急減し、区間BFで一定値0である。点Aと点Bでは関数値を一義的に決定できないが、考察対象が図1-1の梁であるから、点Aと点Bを定義域外と考えることはできない。点Aと点Bを定義域に含め、関数値を一義的に決定するために、左連続成分$f_h(x)$と段差成分$f_d(x)$に分けて表すことにした。点Aと点Bにおける荷重の分布状況を段差と言う。左連続成分$f_h(x)$は図1-2の中段に図示され、段差成分$f_d(x)$は図1-2の下段に図示されている。第1章の図1-2においては眺望関数であったが、第3章、第4章の検討を経て、式1･6または式1･7は成分2個型の超関数になった。点x＝aにおける段差を式7･27のように表現する。

$$f_o(a)=\{f_h(a),f_d(a)\}=(0,W) \qquad 7\cdot27$$

式7･28、式7･29、式7･30で表される関数は点x＝2に大きさ1の段差を持ち、図2-1の関数f(x)、図2-2の関数f(x)、図7-3の関数f(x)、図7-4の関数f(x)と類似しているがいずれとも異なっている。

$$f(x)=\{\tfrac{1}{2}x,0\} \qquad (-\infty<x<2) \qquad 7\cdot28$$

$$f(x)=\{1,1\} \qquad (x=2) \qquad 7\cdot29$$

$$f(x)=\{\tfrac{1}{2}x+1\ \ ,0\} \qquad (2<x<+\infty) \qquad 7\cdot30$$

［選択］

式1･10の左連続成分$f_h(a)$に対して式7･31の右連続成分$f_m(a)$を考える

ことができる。

$$f_m(a)=F_0(a+\mu) \qquad 7\cdot31$$

右連続成分$f_m(x)$は、不連続点を持たない場合と不連続点を持つ場合があるが、不連続点を持つ場合にも不連続点は離散的にしか存在せず、不連続点においても右連続である。左連続成分$f_h(a)$、右連続成分$f_m(a)$、段差成分$f_d(a)$の３つは式7･32の関係があるから、理論的には３つのうちのいずれの２つを用いても良い。

$$f_h(a)+f_d(a)=f_m(a) \qquad 7\cdot32$$

式1･6は、左連続成分$f_h(a)$と段差成分$f_d(a)$の２つを用いている。超関数の導関数の計算(90頁参照)において式4･93が成り立ち、超関数の原始関数の計算(94頁参照)において式4･121が成り立つから、先ず、3つの成分$f_h(x)$､$f_d(x)$､$f_m(x)$のうち、成分$f_d(x)$を用いることを選択した。次に、座標軸xを左から右へ増加するように描く習慣があるから、成分$f_m(x)$より左の成分$f_h(x)$を用いることを選択した。式7･27は点$x=a$において超関数$f_0(x)$が数値$f_h(a)$から数値$f_d(a)$だけ急増することを意味している。段差における急増の始点を$f_h(a)$が表し、急増の大きさを$f_d(a)$が表す。

［関数の一義性と積分の可逆性］

式7･28、式7･29、式7･30で表される成分2個型の超関数f(x)について、式=====、=====、式=====の方法(94頁参照)で式7･33の原始関数g(x)を定義し、式4･90､式4･91､式4･92､式4･99の方法(89頁参照)で微分すれば元の超関数f(x)が得られ、積分の可逆性が維持される。

$$g(x)=\int_{-0}^{x} f(t)\,dt \qquad 7\cdot33$$

対応の不完全を許容する修正を行ったのは、積分の可逆性を失わないためであった。式7･28､式7･29､式7･30で表される成分2個型の超関数f(x)は積分の可逆性を失わない。成分2個型の超関数を用いる修正においては、関数の一義性を失わないし、積分の可逆性も失わない。

［関数の数値性］

成分2個型の超関数を用いる修正においては、従属変数が式1･6または式1･7のように数値の組であり、従属変数が数値である性質が失われる。

普通の関数の従属変数が数値であることを関数の数値性と呼ぶことにする。関数の数値性を放棄し、従属変数を成分2個型にすることにより、関数の一義性と積分の可逆性を維持することができる。関数を用いて分布を表現するときには、関数の一義性と積分の可逆性に比べて、関数の数値性は重要でないと評価される。

［発散点］

式7･5で表される引力の現象において、点$x=0$は定義域$r_1+r_2\leqq x<+\infty$から除外されていた。式2･8､式7･22の関数f(x)を考えたとき、工学や物理学の現象で、式7･22で表されるような現象は見当たらない。式2･8の点$x=2$や式7･5の点$x=0$は定義域外とし、考察の対象から除外するべきである。汎関数型の超関数は区間$-\infty<x<\infty+$を積分区間とするために、発散点をも定義域に含めている。分布の表現の観点からは、発散点を定義域に含めることが意味があるとは思えない。

［関数の一義性と積分の可逆性］

式2･8の関数f(x)について発散点$x=2$を含まないように、式7･34で原始関数g(x)を定義する。

$$g(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt \qquad (2<a,\ a\leqq x) \qquad 7\cdot34$$

関数g(x)の定義域を$a\leqq x$とし、$2<a$を満足するように定数aを選ぶ。定義域内で関数g(x)を微分すると、元の関数f(x)が得られ、積分の可逆性を失わない。式7･35で原始関数g(x)を定義しても、発散点を含まないので、積分の可逆性を失わない。

$$g(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt \qquad (a<2,\ x\leqq a) \qquad 7\cdot35$$

式7･5の関数f(x)について、式7･34の定数aを$0<a$を満足するように選び、式7･35の定数aを$a<0$を満足するように選べば、積分の可逆性を失わない。発散点を定義域から除外し、原始関数の定義域からも除外すれば、関数の一義性を失わないし、積分の可逆性も失わない。

［定義域］

対応の不完全を許容する関数の定義を用いると、定義域に注意を払わ

ない傾向を生じる。完全に対応させる関数の定義を用いると、段差点は定義域に含まれ、発散点は定義域に含まれないことを意識するようになる。完全に対応させる定義を用いると、定義域に注意を払うようになる。

［ヘビサイド関数］

式1･1、式1･2、式1･3、式1･4、式1･5の成分を用い、式1･6で表される荷重$f_0(x)$について、図1-1の単純梁の両側に続く長い道路を想定し、座標xを道路の中心線に沿って延長すれば、関数$f_0(x)$の定義域を区間$0 \leqq x \leqq \ell$より広げることができ、区間$-\infty < x < +\infty$を関数$f_0(x)$の定義域とすることもできる。定義域を広げた関数$f_0(x)$でW＝1、a＝0、b＝+∞とすれば、成分2個型のヘビサイド関数$\eta(x)$が得られる。成分2個型のヘビサイド関数$\eta(x)$は式7･36、式7･37、式7･38のように表される。

$\eta(x)=(0,0) \qquad (-\infty < x < 0) \qquad$ 7･36

$\eta(x)=(0,1) \qquad (x=0) \qquad$ 7･37

$\eta(x)=(1,0) \qquad (0 < x < +\infty) \qquad$ 7･38

式7･36、式7･37、式7･38の関数$\eta(x)$は関数の一義性が維持されている。式3･69、式3･70、式3･71で表される成分無限個型(69頁参照)のヘビサイド関数$\eta(x)$と比べるときは、零値推認または任意値推認で補う。

［負整冪関数］

n＝1､2､3､･･･に対して式7･39の関数f(x)は負整冪関数である。

$f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n} \qquad (1、2、3、\cdots) \qquad$ 7･39

負整冪関数は点x＝0が発散点である。発散点を定義域から除外すれば、負整冪関数f(x)の一義性が失われない。式7･34の定数aを0＜aを満足するように選び、式7･35の定数aをa＜0を満足するように選べば、負整冪関数f(x)の積分の可逆性が失われない。

第8章 点の内部変動

(1)　点域における近似関数の変動

式4･10が成分無限個型の超関数f(t)の点t＝xにおける状態を関数配列で表示している。

$f(x)=\{f_h(x), f_d(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}$　　式4･10(再掲)

点域$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$における近似関数F(t)の変動から、超関数f(x)の成分が式4･5～式4･8で計算される。

$f_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F(x-\rho)$　　4･5(再掲)

$f_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}$　　4･6(再掲)

$f_1(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} F(t)\,dt$　　4･7(再掲)

$f_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho} (t-x)^{n-1}F(t)\,dt$　　4･8(再掲)

近似関数F(t)の点域$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$における変動が超関数f(t)の点t＝xに凝縮されている。超関数の点は点の内部に変動を併せ持っている。点の内部変動が超関数の点の性質を形成している。

(2)　近似関数の起源

［凝視関数］

図1-17の凝視関数M(x)、図1-3の凝視関数$F_0(x)$、図1-16の凝視関数S(x)、図1-8の凝視関数$F_1(x)$、図1-12の凝視関数$F_2(x)$は、力学的な現象として実在している。凝視関数の点半径は極めて小さい正の定数として実在している。視点移動の代用として極限変動(58頁参照)を考えた凝視関数が近似関数の起源の1つである。

［緩和曲線］

図5-4の緩和曲線(115頁参照)が近似関数の起源の1つである。

［古くから知られた近似関数］

式2･61の関数$\Delta(x)$は古くから知られた近似関数であるが、起源がは