

第6章 無限回微分可能な近似関数

(1) 裾野有型の近似関数

[裾野]

ディラック関数の近似関数 $\Delta(x)$ のうちで式2・61や式6・1は無限回微分可能であり、図6-1のように図示される。

$$\Delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \quad 2\cdot61(\text{再掲})$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \varepsilon^2} \quad 6\cdot1$$

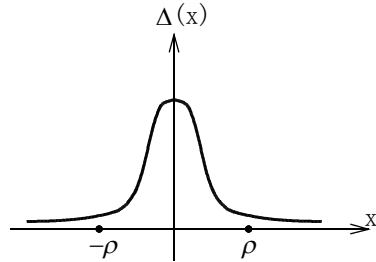


図6-1 裾野有型

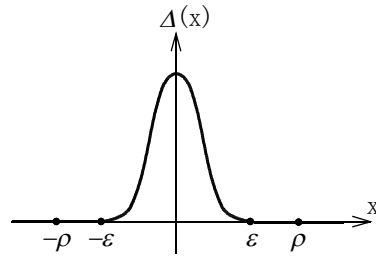


図6-2 裾野無型

点半径変数 ρ とすると $x \leq -\rho$ 、 $+\rho \leq x$ であっても式5・151が成り立つので裾野有型と呼ぶ。点 $x=0$ に頂点を持つ山が区間 $-\rho \leq x \leq +\rho$ の外まで関数値が0にならず、裾野を伴っている状況である。

$$\Delta(x) > 0 \quad 5\cdot151(\text{再掲})$$

[区間 $x \neq 0$ における性質]

ディラック関数 $\delta(x)$ は式2・108、式2・109が成り立つ。

$$\delta(x) = 0 \quad (0 < x < +\infty) \quad 2\cdot108(\text{再掲})$$

$$\delta(x) = 0 \quad (-\infty < x < 0) \quad 2\cdot109(\text{再掲})$$

裾野有型の近似関数 $\Delta(x)$ は式2・108、式2・109の性質を直感的に理解するには適さないが、式3・21、式3・22が成り立つから、式2・108、式2・109が成り立たつことは理解される。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(x) = 0 \quad (+\rho \leq x < +\infty) \quad 3\cdot21(\text{再掲})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(x) = 0 \quad (-\infty < x \leq -\rho) \quad 3\cdot22(\text{再掲})$$

[点 $x=0$ における性質]

式2・108、式2・109は点 $x=0$ における性質を説明していない。汎関数型の理論においては、点 $x=0$ における性質を直接には説明せず、式6・2で説明する場合が多い。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad 6\cdot2$$

近似関数 $\Delta(x)$ が式2・131を満足することから、式6・2が成立することは理解されるが、式6・2の右辺の数値1が点 $x=0$ に分布していると考えるのは無理がある。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x) dx = 1 \quad 2\cdot131(\text{再掲})$$

成分表示型の理論においては、点半径変数 ρ を用いるので式4・238が成り立ち、式4・239(106頁参照)が成り立つ。

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{+\rho} \Delta(x) dx = 1 \quad 4\cdot238(\text{再掲})$$

$$\int_{-0}^{+0} \delta(x) dx = 1 \quad 4\cdot239(\text{再掲})$$

式4・239の右辺の数値1は、式6・2と異なって、点 $x=0$ に分布していると考えられる。式4・239と式6・2の違いは積分区間であり、式4・239の積分区間は $-0 < x < +0$ である。区間 $-0 < x < +0$ と点 $x=0$ は同一視されるから、式4・239の右辺の数値1と点 $x=0$ を関係付けられる。裾野有型の近似関数を用いると、汎関数型の理論においては、点半径変数 ρ を用いないので、式4・239を導くことができず、ディラック関数 $\delta(x)$ の点 $x=0$ における性質を適切に説明できなかった。

(2) 裾野無型の近似関数

[有限回微分可能な裾野無型]

ディラック関数の近似関数 $\Delta(x)$ のうちで、式5・141と式4・12の近似関数 $\Delta(x)$ (123頁参照)は区間 $-\infty < x < +\infty$ で $n-1$ 回微分可能であり、図6-2

のように図示される。式4・12が成り立つので裾野無型と呼ぶ。点 $x=0$ に頂点を持つ山が区間 $-\rho \leq x \leq \rho$ の外は関数値0であり、裾野を伴っていない状況である。

$$\Delta(x) = 0 \quad (-\infty < x \leq -\varepsilon, +\varepsilon \leq x < +\infty) \quad 4 \cdot 12(\text{再掲})$$

裾野無型の近似関数 $\Delta(x)$ は式4・12が成り立つので、式2・108、式2・109の性質を直感的に理解するのに適している。式6・3が成り立つので、裾野無型の近似関数 $\Delta(x)$ を用いれば、点半径変数 ρ を用いなくとも式4・239が成り立ち、ディラック関数 $\delta(x)$ の点 $x=0$ における性質を説明することができる。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x) dx = 1 \quad 6 \cdot 3$$

式5・141と式4・12の近似関数 $\Delta(x)$ は $n-1$ 回微分可能ではあるが、無限回微分可能ではない。

[無限回微分可能な裾野無型の近似関数]

無限回微分可能な裾野無型の近似関数も存在する。図示すると有限回微分可能な裾野無型と類似しており、図6-2のようになると考えて差し支えない。式2・99、式2・100に(46頁参照)において $a=-\varepsilon$ 、 $b=\varepsilon$ を代入すれば式6・4、式6・5が得られる。

$$\phi(x) = 0 \quad (-\infty < x \leq -\varepsilon, +\varepsilon \leq x < +\infty) \quad 6 \cdot 4$$

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{(x+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-\varepsilon)^2}\right) \quad (-\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon) \quad 6 \cdot 5$$

式6・5と定数 K を用いて式6・6を作り、式6・4と定数 K を用いて式4・12を作り、式6・6、式4・12の関数 $\Delta(x)$ を考える。

$$\Delta(x) = K \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-\varepsilon)^2}\right) \quad (-\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon) \quad 6 \cdot 6$$

$$\Delta(x) = K \cdot \phi(x) = 0 \quad (-\infty < x \leq -\varepsilon, +\varepsilon \leq x < +\infty) \quad 4 \cdot 12(\text{再掲})$$

数値 K は独立変数 x を含まないので定数であるが、補助変数 ε を含み、変数 ε の変動に伴って数値 K は変動する。式6・6は式6・3を満足するから、式6・7が成り立つ。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{(x+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-\varepsilon)^2}\right) dx = \frac{1}{K} \quad (-\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon) \quad 6 \cdot 7$$

式6・5は図6-3のように図示される。式2・83について $-\varepsilon$ と ε の横移動を行

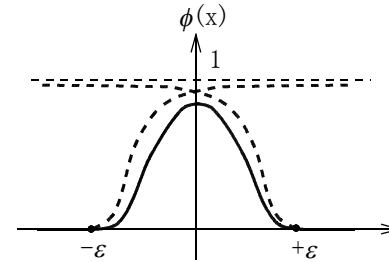


図6-3 式6・4の関数 $\phi(x)$

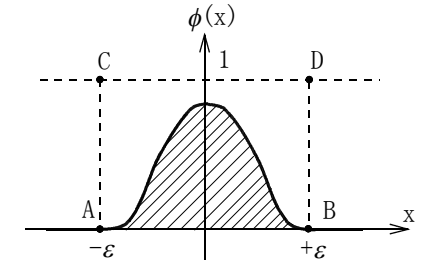


図6-4 関数 $\phi(x)$ の積分

い、式2・84と式2・85を参考(43頁参照)にし、図6-3を見れば式6・8が成り立つ。

$$0 < \exp\left(-\frac{1}{(x+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-\varepsilon)^2}\right) dx < 1 \quad 6 \cdot 8$$

式6・7の積分は図6-4で斜線を施された部分の面積であるから、長方形ACDBより小さいので、式6・9が成り立つ。

$$0 < \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{(x+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-\varepsilon)^2}\right) dx < 2\varepsilon \quad 6 \cdot 9$$

式6・9と式6・7から $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $K \rightarrow \infty$ となることがわかる。式6・6、式4・12の関数 $\Delta(x)$ は図6-2のように図示される。図6-2は点 $x=0$ に頂点を持つ山の形をしている。 $\varepsilon \rightarrow 0$ に伴って $K \rightarrow \infty$ となるから、図6-2の山は高くやせ形になる。式6・6と式6・7から式6・10が得られる。

$$\Delta(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{(x+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-\varepsilon)^2}\right)}{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{(x+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-\varepsilon)^2}\right) dx} \quad 6 \cdot 10$$

式6・10、式4・12の関数 $\Delta(x)$ は無限回微分可能な裾野無型の近似関数である。

[理論的な考察における想定]

式6・7は式5・128(121頁参照)と類似している。式5・128の積分は漸化式を用いて式5・140のように計算されるが、式6・7の積分は初等的な方法で計算することは困難である。式6・9によって概略の大きさを判断するのがやっとである。式5・141、式4・12の関数 $\Delta(x)$ は $n-1$ 回微分可能であり、必要に応じて大きな整数 n を選ぶことができる。式5・141で $n=3$ とすると、式5・125が得られる。

$$\Delta(x) = -\frac{35}{32\varepsilon^7} (x-\varepsilon)^3 (x+\varepsilon)^3 \quad 5 \cdot 125(\text{再掲})$$

事实上は式5・125と式4・12の関数 $\Delta(x)$ を用いて、初等的な方法で式6・3の積分を計算すれば良いが、式6・10、式4・12の関数 $\Delta(x)$ が存在することを知っていれば、理論的な考察において無限回微分可能な裾野無型の近似関数を想定することができる。

(3) 裾野有型の極限変動

[式2・61と式4・239についての注意]

ディラック関数 $\delta(x)$ の点 $x=0$ における性質を式4・239が示している。汎関数型の理論においては点半径変数 ρ を用いないから、式4・238を思いつかず、式6・3が式4・239を意味すると考え易いが、裾野有型の近似関数を用いる場合は誤りである。

$$\int_{-0}^{+0} \delta(x) dx = 1 \quad 4 \cdot 239(\text{再掲})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{+\rho} \Delta(x) dx = 1 \quad 4 \cdot 238(\text{再掲})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x) dx = 1 \quad 6 \cdot 3(\text{再掲})$$

式2・61の関数 $\Delta(x)$ は定数 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ を標準偏差とする正規分布関数であるから、 ε は標準偏差の $\sqrt{2}$ 倍であり、式2・61の関数 $\Delta(x)$ を代入すると、式6・11が成り立ち、式6・3は成り立たない。

$$\Delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \quad 2 \cdot 61(\text{再掲})$$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x) dx \doteq 0.68\sqrt{2} = 0.96 \quad 6 \cdot 11$$

式4・239は式6・3ではなく、式4・238を意味することに注意すべきである。式6・3においては、点半径変数 ρ と特異化変数 ε が同じ速さで極限変動している。式4・238のように、特異化変数 ε が点半径変数 ρ より速く極限変動しないために生じた誤りである。

[式6・1と式4・239についての注意]

式6・1の関数 $\Delta(x)$ を式6・3の左辺に代入して計算するために、式6・12の変数変換をすると、式6・13が得られ、表6=1が得られる。

$$\begin{array}{lll} \Delta(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \varepsilon^2} & 6 \cdot 1(\text{再掲}) & \text{表6=1} \quad \text{積分区間の対応} \\ x = \varepsilon \tan \theta & 6 \cdot 12 & \begin{array}{c|c} x & -\varepsilon \rightarrow +\varepsilon \\ \theta & -\frac{\pi}{4} \rightarrow +\frac{\pi}{4} \end{array} \\ dx = \varepsilon \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta & 6 \cdot 13 & \end{array}$$

式6・14が成り立ち、式6・3の左辺に式6・1、式6・13、式6・14を代入しすると、式6・15が得られ、式6・3は成り立たない。

$$\begin{aligned} x^2 + \varepsilon^2 &= \varepsilon^2 \tan^2 \theta + \varepsilon^2 = \varepsilon^2 (\tan^2 \theta + 1) = \varepsilon^2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 \\ &= \varepsilon^2 \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\varepsilon^2}{\cos^2 \theta} & 6 \cdot 14 \\ \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{\pi x^2 + \varepsilon^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\pi} \varepsilon \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon^2} \varepsilon \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} [\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} = \frac{1}{2} & 6 \cdot 15 \end{aligned}$$

式6・1の関数 $\Delta(x)$ についても、式4・239は式6・3ではなく、式4・238を意味することに注意すべきである。

$$\int_{-0}^{+0} \delta(x) dx = 1 \quad 4 \cdot 239(\text{再掲})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{+\rho} \Delta(x) dx = 1 \quad 4 \cdot 238(\text{再掲})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x) dx = 1 \quad 6 \cdot 3(\text{再掲})$$

式6・3においては、点半径変数 ρ と特異化変数 ε が同じ速さで極限変動している。式4・238のように、特異化変数 ε が点半径変数 ρ より速く極限変動しないために生じた誤りである。

[式2・61について点半径変数 ρ の変動の一時停止]

特異化変数 ε を点半径変数 ρ より速く極限変動させるために、点半径変数 ρ を一時停止し、特異化変数 ε だけを極限変動させてみる。点半径変数 ρ が一時停止した状態で式3・50(65頁参照)の変数変換を行うと、式3・52のように計算され、式3・36が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{+\rho} \Delta(x) dx = 1 \quad 3 \cdot 36 \text{ (再掲)}$$

式3・36が計算された後に点半径変数 ρ の極限変動を再開すると、式3・36を代入して式6・16のように計算され、式4・238が成り立つ。

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{+\rho} \Delta(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} 1 = 1 \quad 6 \cdot 16$$

[式6・1について点半径変数 ρ の変動の一時停止]

点半径変数 ρ が一時停止した状態で式6・12の変数変換をすると式6・13が得られる。積分区間が表6=2のように変換され、式6・14を用いて式6・17のように計算される。

表6=2	積分区間の対応($\varepsilon \rightarrow 0$)
x	$-\rho \rightarrow +\rho$
θ	$-\frac{\pi}{2} \rightarrow +\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} \varepsilon \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon^2} \varepsilon \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} [\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} = 1 \end{aligned} \quad 6 \cdot 17$$

式6・17を代入すると式3・36が成り立つ。式3・36が計算された後に点半径変数 ρ の極限変動を再開すると、式3・36を代入して式6・16のように計算され、式4・238が成り立つ。点半径変数 ρ を一時停止させ、特異化変数 ε だけの変動を行い、次いで点半径変数 ρ の変動を行うと、式2・61の関数 $\Delta(x)$ についても、式6・1の関数 $\Delta(x)$ についても式4・238が成り立つ。式3・50や式6・12の変数変換を見ると、積分端点が $a < 0 < b$ を満足する任意の

定数であれば、式6・18が成り立つことがわかる。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \Delta(x) dx = 1 \quad 6 \cdot 18$$

[式2・61について極限変動が速いことの意味]

式2・61の関数 $\Delta(x)$ について、特異化変数 ε が点半径変数 ρ より速く極限変動することの意味を考える。式3・50(65頁参照)の変数変換で $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限変動を考えると、 $x = +\rho$ のとき、 $y \rightarrow +\infty$ になるから、式6・19が成り立つことが式4・238が成り立つための条件である。

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow +\infty \quad 6 \cdot 19$$

特異化変数 ε と点半径変数 ρ が共に変動し、式6・19が成り立つとき、式6・20、式6・21のように書くことができる。

$$\frac{\rho}{\varepsilon} = q\varepsilon^{-p} \quad 6 \cdot 20$$

$$q > 0, p > 0 \quad 6 \cdot 21$$

式6・20を式6・22のように変形すると、点半径変数 ρ が一時停止しているとき、式6・23が成り立ち、点半径変数 $\rho \rightarrow 0$ の変動しているとき、式6・24が成り立たなければならない。

$$\rho = q\varepsilon^{1-p} \quad 6 \cdot 22$$

$$1-p = 0 \quad 6 \cdot 23$$

$$1-p > 0 \quad 6 \cdot 24$$

式6・21、式6・23、式6・24を整理すると、式6・25が得られる。

$$q > 0, 0 < p \leq 1 \quad 6 \cdot 25$$

式6・22の等式のもとで式6・25の条件が満足されることが、特異化変数 ε が点半径変数 ρ のより速く極限変動することを意味する。

[式6・1について極限変動が速いことの意味]

式6・1の関数 $\Delta(x)$ について、特異化変数 ε が点半径変数 ρ より速く極限変動することの意味を考える。式6・12の変数変換で $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限変動を考えると、 $x = +\rho$ のとき、 $\theta \rightarrow +\frac{\pi}{2}$ になるが、このとき点半径変数 ρ と特異化変数 ε の関係については、式6・19が成り立つことが式4・238が成り

立つための条件である。式2・61の関数 $\Delta(x)$ についてと同じように、式6・20、式6・21、式6・22、式6・23、式6・24、式6・25の考察が行われる。式6・1の関数 $\Delta(x)$ についても、式6・22の等式のもとで式6・25の条件が満足されることが、特異化変数 ε が点半径変数 ρ より速く極限変動することを意味する。

(4) 裾野無型の極限変動

[視覚的な理解]

裾野無型の近似関数 $\Delta(x)$ を図示した図6-2には点半径変数 ρ と特異化変数 ε の両方が記入されている。裾野有型の近似関数 $\Delta(x)$ を図示した図6-1には点半径変数 ρ だけが記入されている。図6-2で $\varepsilon \leq \rho$ であることが、裾野無型について特異化変数 ε が点半径変数 ρ より速く極限変動することを、視覚的に意味している。裾野有型について特異化変数 ε が点半径変数 ρ より速く極限変動することを、図6-1は視覚的に示さない。

[点半径変数 ρ から特異化変数 ε の分離]

裾野無型の近似関数においては、もともと、点半径変数 ρ だけが用いられ、特異化変数の働きを兼ね備えていたが、点半径変数 ρ から特異化変数 ε を分離(61頁参照)した。式4・12と $\varepsilon \leq \rho$ から式6・26が成り立つ。

$$\Delta(x) = 0 \quad (-\infty < x \leq -\rho, +\rho \leq x < +\infty) \quad 6 \cdot 26$$

式6・26の括弧書きの註記が、裾野無型の近似関数 $\Delta(x)$ について、点半径変数 ρ の意味を説明している。式4・12と式6・26から式6・27が成り立つことは明らかである。

$$\Delta(x) = 0 \quad (-\rho \leq x \leq -\varepsilon, +\varepsilon \leq x \leq +\rho) \quad 6 \cdot 27$$

式6・27を用いて式6・28のように計算される。

$$\begin{aligned} \int_{-\rho}^{+\rho} \Delta(x) dx &= \int_{-\rho}^{-\varepsilon} \Delta(x) dx + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x) dx + \int_{+\varepsilon}^{+\rho} \Delta(x) dx \\ &= \int_{-\rho}^{-\varepsilon} 0 dx + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x) dx + \int_{+\varepsilon}^{+\rho} 0 dx = 0 + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x) dx + 0 \\ &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x) dx \quad 6 \cdot 28 \end{aligned}$$

裾野無型の近似関数 $\Delta(x)$ について式6・3が成り立ち、式6・3と式6・28を用いれば、裾野無型について式3・36が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Delta(x) dx = 1 \quad 6 \cdot 3 \text{ (再掲)}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{+\rho} \Delta(x) dx = 1 \quad 3 \cdot 36 \text{ (再掲)}$$

点半径変数 ρ から特異化変数 ε を分離したのだから、裾野無型においては $\varepsilon = \rho$ として運用して差し支えない。 $\varepsilon = \rho$ として運用すると式6・3が得られ、分離して運用すると式3・36が得られる。

[裾野無型について点半径変数 ρ の変動の一時停止]

式3・36の計算において、特異化変数 ε は変動するが、点半径変数 ρ は変動しない。点半径変数 ρ は一時停止している。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{+\rho} \Delta(x) dx = 1 \quad 3 \cdot 36 \text{ (再掲)}$$

式3・36が計算された後に点半径変数 ρ の極限変動を再開すると、式3・36を代入して式6・16のように計算され、式4・238が成り立つ。

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{+\rho} \Delta(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} 1 = 1 \quad 6 \cdot 16 \text{ (再掲)}$$

[裾野無型について極限変動が速いことの意味]

裾野無型の近似関数 $\Delta(x)$ は図6-2のように図示され、特異化変数 ε が点半径変数 ρ より速く極限変動することは、 $\varepsilon \leq \rho$ であることを意味する。式6・22をまねて式6・29と書くと、式6・30の条件が満足されることが、特異化変数 ε が点半径変数 ρ より速く極限変動すること意味する。

$$\rho = p\varepsilon \quad 6 \cdot 29$$

$$p \geq 1 \quad 6 \cdot 30$$

式6・29、式6・30の条件は、式5・141と式4・12の近似関数 $\Delta(x)$ についても、式6・6と式4・12の関数 $\Delta(x)$ についても、共通である。

(5) 裾野の一般化

図6-1の近似関数 $\Delta(x)$ と図6-2の近似関数 $\Delta(x)$ が点 $x=0$ に頂点を持つ

山の形をしていることから、式5・151の特徴を捉えて裾野有と言い、式6・26の特徴を捉えて裾野無と言う。裾野の定義を一般化して、山の形をしていない近似関数F(x)についても適用することを試みる。式5・151と式2・108、式2・109を比べると、式6・31が成り立つ。

$$\Delta(x) \neq \delta(x) \quad (-\infty < x \leq -\rho, +\rho \leq x < +\infty) \quad 6 \cdot 31$$

式6・26と式2・108、式2・109を比べると、式6・32が成り立つ。

$$\Delta(x) = \delta(x) \quad (-\infty < x \leq -\rho, +\rho \leq x < +\infty) \quad 6 \cdot 32$$

超関数f(x)が隣り合った特異点x=aとx=bを持ち、a<bであるとき、区間a+ρ ≤ x ≤ b-ρにおいて近似関数F(x)が式6・33を満足するならば、式6・31を参考にして、この区間で裾野有型であると言う。

$$F(x) \neq f(x) \quad (a+\rho \leq x \leq b-\rho) \quad 6 \cdot 33$$

式6・33は図6-5のように図示される。式6・31の括弧書きで註記された区間

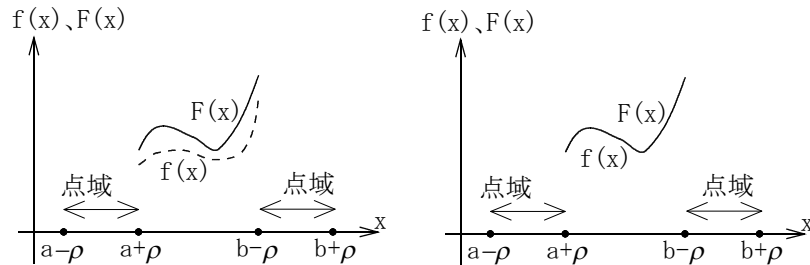


図6-5 裾野有型

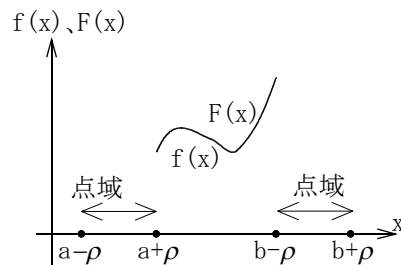


図6-6 裾野無型

$-\infty < x \leq -\rho, +\rho \leq x < +\infty$ は特異点以外の区間であり、式6・33の括弧書きで註記された区間 $a+\rho \leq x \leq b-\rho$ も特異点以外の区間であるから、式6・31と式6・33は同型である。近似関数F(x)が式6・34を満足するならば、式6・32を参考にして、この区間で裾野無型であると言う。

$$F(x) = f(x) \quad (a+\rho \leq x \leq b-\rho) \quad 6 \cdot 34$$

式6・34は図6-6のように図示される。式6・32と式6・34は同型である。特異点以外の区間については、式6・33を満足しても、式6・35を満足する。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) = f(x) \quad (a+\rho \leq x \leq b-\rho) \quad 6 \cdot 35$$

式6・35に比べて式6・34の方が、超関数f(x)の特異点以外の区間について直感的に理解し易い。無限回微分可能な式6・10の裾野無型の近似関数は、

初等的な方法では積分できない。初等的な方法で積分でき、式6・34をも満足するので、有限回微分可能な裾野無型の近似関数を用いることが推奨される。

(6) 関数とヘビサイド関数の積

[右半分関数]

微分可能関数φ(x)とヘビサイド関数η(x)の積は式6・36、式6・37、式6・38のように右半分関数を作る。

$$\phi(x) \cdot \eta(x) = 0 \quad (-\infty < x < 0) \quad 6 \cdot 36$$

$$\phi(x) \cdot \eta(x) = \phi(0) \quad (x=0) \quad 6 \cdot 37$$

$$\phi(x) \cdot \eta(x) = \phi(x) \quad (0 < x < +\infty) \quad 6 \cdot 38$$

[右半分一次冪関数]

関数φ(x)を一次冪関数xとすると式6・39、式6・40のようになり、式5・31、式5・32の関数f(x)と一致する。

$$x \cdot \eta(x) = 0 \quad (-\infty < x \leq 0) \quad 6 \cdot 39$$

$$x \cdot \eta(x) = x \quad (0 \leq x < +\infty) \quad 6 \cdot 40$$

関数xと式4・13、式4・14、式4・15の関数H(x)の積 $x \cdot H(x)$ は式6・41、式6・42、式6・43のようになり、図6-7のように図示される。

$$x \cdot H(x) = 0 \quad (-\infty < x \leq -\varepsilon) \quad 6 \cdot 41$$

$$x \cdot H(x) = \frac{3}{16\varepsilon^3} x^6 - \frac{5}{8\varepsilon^3} x^4 + \frac{15}{16\varepsilon} x^2 + \frac{1}{2} x \quad (-\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon) \quad 6 \cdot 42$$

$$x \cdot H(x) = x \quad (+\varepsilon \leq x < +\infty) \quad 6 \cdot 43$$

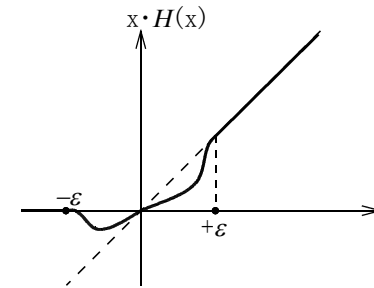


図6-7 裾野無

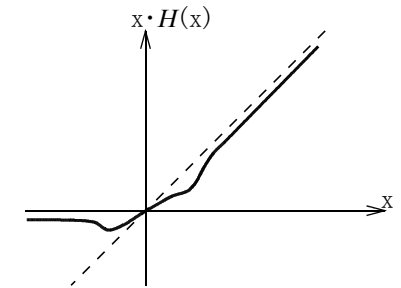


図6-8 裾野有

式4・87と式6・41が同じであり、式4・89と式6・43が同じであるが、式4・88と式6・42は異なっている。図5-2と図6-7が違いを視覚的に示している。異なっているのは、式5・31の直線と式5・32の直線を滑らかに接続していることは同じであり、同等な近似関数である。点 $x=-\varepsilon$ 、 $x=+\varepsilon$ に注目したとき、式4・87、式4・88、式4・89の関数 $F(x)$ は3回微分可能であるが、式6・41、式6・42、式6・43の関数 $\{x \cdot H(x)\}$ は2回微分可能である。六次関数であることは同じであるが、滑らかさが異なっている。式6・41、式6・42、式6・43において式2・73(41頁参照)の近似関数 $H(x)$ を用いると、図6-8のように図示され、式5・31の直線と式5・32の直線が漸近線になる。

[折れ線]

式6・44、式6・45の関数 $f(x)$ は点 $x=4$ において折れ曲がっており、図6-9のように図示される。

$$f(x) = x \quad (-\infty < x \leq 4) \quad 6 \cdot 44$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 6 \quad (4 \leq x < +\infty) \quad 6 \cdot 45$$

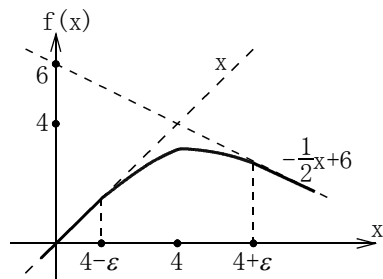


図6-9 折れ線

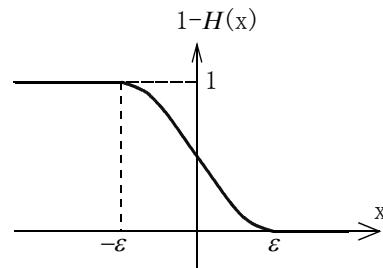


図6-10 近似関数 $\{1-H(x)\}$

式6・46の関数 $F(x)$ は式6・44の直線と式6・45の直線を滑らかに接続しており、近似関数である。

$$F(x) = x \cdot \{1-H(x-4)\} + (-\frac{1}{2}x+6) \cdot H(x-4) \quad 6 \cdot 46$$

関数 $H(x)$ が図5-1のように図示されるのに対し、関数 $\{1-H(x)\}$ が図6-10のように図示される。図5-1の関数 $H(x)$ が右半分関数であるのに対し、図6-10は左半分関数である。図6-10を4だけ横移動して関数 x を乗じ、図

5-1を4だけ横移動して関数 $(-\frac{1}{2}x+6)$ を乗じて足し算すれば、式6・46が得られる。図6-9の状況は図1-17(24頁参照)の状況に類似しており、式6・46を用いて図1-17の曲線ACBを数式化することができる。

[ヘビサイド関数の近似関数]

式6・47が成り立つから式6・48が成り立つ。

$$\{x \cdot \eta(x)\}' = x' \cdot \eta(x) + x \cdot \eta'(x) = \eta(x) + x \cdot \delta(x) = \eta(x) \quad 6 \cdot 47$$

$$\{x \cdot H(x)\}' = H(x) \quad 6 \cdot 48$$

式6・42の両辺を微分すると式6・49が得られる。

$$H(x) = \frac{9}{8\varepsilon^5} x^5 - \frac{20}{8\varepsilon^3} x^3 + \frac{15}{8\varepsilon} x + \frac{1}{2} \quad (-\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon) \quad 6 \cdot 49$$

$$H(x) = \frac{3}{16\varepsilon^5} x^5 - \frac{5}{8\varepsilon^3} x^3 + \frac{15}{16\varepsilon} x + \frac{1}{2} \quad (-\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon) \quad 4 \cdot 14(\text{再掲})$$

$$H(x) = 0 \quad (x \leq -\varepsilon) \quad 4 \cdot 13(\text{再掲})$$

$$H(x) = 1 \quad (+\varepsilon \leq x) \quad 4 \cdot 15(\text{再掲})$$

式4・13、式6・49、式4・15の関数 $H(x)$ はヘビサイド関数の近似関数の1つである。式6・49と式4・14は異なっているが、同等な近似関数である。点 $x=-\varepsilon$ 、 $x=+\varepsilon$ に注目したとき、式4・13、式4・14、式4・15の関数 $H(x)$ は2回微分可能であるが、式4・13、式6・49、式4・15の関数 $H(x)$ は1回微分可能である。五次関数であることは同じであるが、滑らかさが異なっている。