第5章　整冪多項式で表された近似関数

(1)　ヘビサイド関数の五次関数で表された近似関数

［想定］

　ヘビサイド関数η(x)を成分表示すると式3·69、式3·70、式3·71で表される。

$\eta(x)=(0,0,0,0,\cdot\cdot\cdot)$　　(x<0)　　3·69(再掲)

$\eta(x)=(0,1,0,0,\cdot\cdot\cdot)$　　(x=0)　　3·70(再掲)

$\eta(x)=(1,0,0,0,\cdot\cdot\cdot)$　　(0<x)　　3·71(再掲)

近似関数を整冪多項式で表すことができれば、式2·73(41頁参照)の近似関数に比べて計算が簡単である。ヘビサイド関数の近似関数H(x)を式5·1の整冪多項式、式4·13、式4·15の定数関数で表す。

$H(x)=0$　　$(-\infty<x\leqq-\varepsilon)$　　4·13(再掲)

$H(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdot\cdot\cdot+a_2x^2+a_1x+a_0$　　$(-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon)$　　5·1

$H(x)=1$　　$(+\varepsilon\leqq x<+\infty)$　　4·15(再掲)

［次数の決定］

　式5·1がn次とすると、未定係数はa_n、a_{n-1}、・・・、a_1、a_0のn+1個であり、係数を決定するためにn+1個の条件が必要である。図5-1に示すように、

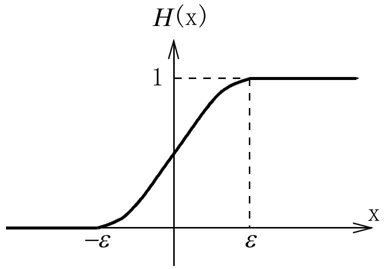

図5-1　5次の近似関数 H(x)

$H(-\varepsilon)=0$　　5·2

$H(\varepsilon)=1$　　5·3

$H'(-\varepsilon)=0$　　5·4

$H'(\varepsilon)=0$　　5·5

$H''(-\varepsilon)=0$　　5·6

$H''(\varepsilon)=0$　　5·7

・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・

点x=−εで式4·13と滑らかに接続し、点x=εで式4·15と滑らかに接続するから、$H(-\varepsilon)$と$H(\varepsilon)$についての条件、$H'(-\varepsilon)$と$H'(\varepsilon)$についての条件、$H''(-\varepsilon)$と$H''(\varepsilon)$についての条件、・・・を満足すべきであり、条件数

が偶数である。導関数の階数について低い方から第m階までの条件を用いることにすると、条件数は2m+2個である。第2階導関数までの条件を用いることにすると、m=2、条件数は6個であり、式5·2〜式5·7が条件である。条件数n+1=6であるから、n=5であり、式5·1でn=5とすると、式5·8が得られ、関数H(x)は5次である。

$H(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$　　5·8

［未定係数の決定］

　式5·2〜式5·7に式5·8を代入すると、式5·9〜式5·14が得られる。

$-a_5\varepsilon^5+a_4\varepsilon^4-a_3\varepsilon^3+a_2\varepsilon^2-a_1\varepsilon+a_0=0$　　5·9

$a_5\varepsilon^5+a_4\varepsilon^4+a_3\varepsilon^3+a_2\varepsilon^2+a_1\varepsilon+a_0=1$　　5·10

$5a_5\varepsilon^4-4a_4\varepsilon^3+3a_3\varepsilon^2-2a_2\varepsilon+a_1=0$　　5·11

$5a_5\varepsilon^4+4a_4\varepsilon^3+3a_3\varepsilon^2+2a_2\varepsilon+a_1=0$　　5·12

$-20a_5\varepsilon^3+12a_4\varepsilon^2-6a_3\varepsilon+2a_2=0$　　5·13

$20a_5\varepsilon^3+12a_4\varepsilon^2+6a_3\varepsilon+2a_2=0$　　5·14

{式5·9+式5·10}÷2　　$a_4\varepsilon^4+a_2\varepsilon^2+a_0=\frac{1}{2}$　　5·15

{式5·10−式5·9}÷2　　$a_5\varepsilon^5+a_3\varepsilon^3+a_1\varepsilon=\frac{1}{2}$　　5·16

{式5·11+式5·12}÷2　　$5a_5\varepsilon^4+3a_3\varepsilon^2+a_1=0$　　5·17

{式5·12−式5·11}÷2　　$4a_4\varepsilon^3+2a_2\varepsilon=0$　　5·18

{式5·13+式5·14}÷2　　$12a_4\varepsilon^2+2a_2=0$　　5·19

{式5·14−式5·13}÷2　　$20a_5\varepsilon^3+6a_3\varepsilon=0$　　5·20

式5·19より　　$a_2=-6a_4\varepsilon^2$　　5·21

式5·20より　　$a_3=-\frac{10}{3}a_5\varepsilon^2$　　5·22

式5·18より　　$a_2=-2a_4\varepsilon^2$　　5·23

式5·21、式5·23より　　$-6a_4\varepsilon^2=-2a_4\varepsilon^2$

$a_4=0$　　5·24

式5·23へ代入　　$a_2=0$　　5·25

式5·17へ式5·22を代入　　$5a_5\varepsilon^4+3\left(-\frac{10}{3}a_5\varepsilon^2\right)\cdot\varepsilon^2+a_1=0$

$$a_1 = 5a_5\varepsilon^4 \qquad 5\cdot26$$

式5･15へ式5･24、式5･25を代入　$a_0 = \frac{1}{2}$　5･27

式5･16へ式5･22、式5･26を代入　$a_5\varepsilon^5 + (-\frac{10}{3}a_5\varepsilon^2)\varepsilon^3 + (5a_5\varepsilon^4)\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\frac{3-10+15}{3}a_5\varepsilon^5 = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{3}{16\varepsilon^5} \qquad 5\cdot28$$

式5･28を式5･22へ代入　$a_3 = -\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{16\varepsilon^5}\varepsilon^2 = -\frac{5}{8\varepsilon^3}$　5･29

式5･28を式5･26へ代入　$a_1 = 5\cdot\frac{3}{16\varepsilon^5}\varepsilon^4 = \frac{15}{16\varepsilon}$　5･30

式5･28、式5･24、式5･29、式5･25、式5･30、式5･27を式5･8に代入すると、式4･14(75頁参照)が得られる。

$$H(x) = \frac{3}{16\varepsilon^5}x^5 - \frac{5}{8\varepsilon^3}x^3 + \frac{15}{16\varepsilon}x + \frac{1}{2} \qquad (-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon) \qquad 4\cdot14(再掲)$$

式4･13、式4･14、式4･15が近似関数$H(x)$である。

[補助変数ε]

式4･14の補助変数εは図1-3(4頁参照)の部分HIMの点半径μや図1-16(22頁参照)の部分AGCの点半径νが起源であり、元々は定数であった。式3･12と同じ推論(58頁参照)で補助変数化され、点半径変数ρになった。式3･26、式3･27と同じ推論(61頁参照)で機能が2つに分離され、特異化変数εになった。式4･14の補助変数εは特異化変数であるが、点半径変数の意味を含んでいる。

(2)　右半分一次冪関数の六次関数で表された近似関数

[想定]

式5･31、式5･32の関数f(x)は点x＝0において折れ曲がっており、微分不能である。式5･31、式5･32の関数f(x)は右半分一次冪関数である。

$$f(x) = 0 \qquad (-\infty < x \leqq 0) \qquad 5\cdot31$$

$$f(x) = x \qquad (0 \leqq x < +\infty) \qquad 5\cdot32$$

式5･31、式5･32の関数f(x)を零値推認により、成分無限個型の超関数と見なすと、式4･85、式4･86の超関数f(x)(88頁参照)である。関数f(x)の近似関数F(x)は、滑らかであり、微分可能であると考える。近似関数F(x)を式5･33の整冪多項式、式4･87の定数関数、式4･89の一次関数で表す。

$$F(x) = 0 \qquad (-\infty < x \leqq -\varepsilon) \qquad 4\cdot87(再掲)$$

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon) \qquad 5\cdot33$$

$$F(x) = x \qquad (+\varepsilon \leqq x < +\infty) \qquad 4\cdot89(再掲)$$

式5･33がn次とすると、未定係数はa_n、a_{n-1}、・・・、a_1、a_0のn+1個であり、係数を決定するためにn+1個の条件が必要である。図5-2に示すように、

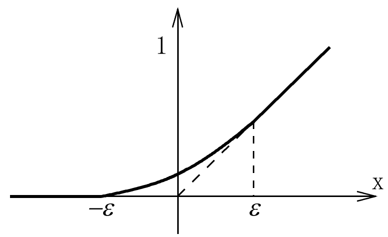

図5-2　7次の近似関数 F(x)

$$F(-\varepsilon) = 0 \qquad 5\cdot34$$

$$F(\varepsilon) = \varepsilon \qquad 5\cdot35$$

$$F'(-\varepsilon) = 0 \qquad 5\cdot36$$

$$F'(\varepsilon) = 1 \qquad 5\cdot37$$

$$F''(-\varepsilon) = 0 \qquad 5\cdot38$$

$$F''(\varepsilon) = 0 \qquad 5\cdot39$$

$$F'''(-\varepsilon) = 0 \qquad 5\cdot40$$

$$F'''(\varepsilon) = 0 \qquad 5\cdot41$$

・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・

点x＝$-\varepsilon$で式4･87と滑らかに接続し、点x＝εで式4･89と滑らかに接続するから、F($-\varepsilon$)とF(ε)についての条件、F'($-\varepsilon$)とF'(ε)についての条件、F''($-\varepsilon$)とF''(ε)についての条件、・・・を満足すべきであり、条件数が偶数である。導関数の階数について低い方から第m階までの条件を用いることにすると、条件数は2m+2個である。第3階導関数までの条件を用いると、m＝3、条件数は8個であり、式5･34～式5･41が条件である。条件数n+1＝8であるから、n＝7であり、式5･33でn＝7とすると、式5･42が得られ、関数F(x)は7次である。

$$F(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad 5\cdot42$$

[未定係数の決定]

式5・34～式5・41に式5・42を代入すると、式5・43～式5・50が得られる。

$-a_7\varepsilon^7+a_6\varepsilon^6-a_5\varepsilon^5+a_4\varepsilon^4-a_3\varepsilon^3+a_2\varepsilon^2-a_1\varepsilon+a_0=0$ 5・43

$a_7\varepsilon^7+a_6\varepsilon^6+a_5\varepsilon^5+a_4\varepsilon^4+a_3\varepsilon^3+a_2\varepsilon^2+a_1\varepsilon+a_0=\varepsilon$ 5・44

$7a_7\varepsilon^6-6a_6\varepsilon^5+5a_5\varepsilon^4-4a_4\varepsilon^3+3a_3\varepsilon^2-2a_2\varepsilon+a_1=0$ 5・45

$7a_7\varepsilon^6+6a_6\varepsilon^5+5a_5\varepsilon^4+4a_4\varepsilon^3+3a_3\varepsilon^2+2a_2\varepsilon+a_1=1$ 5・46

$-42a_7\varepsilon^5+30a_6\varepsilon^4-20a_5\varepsilon^3+12a_4\varepsilon^2-6a_3\varepsilon+2a_2=0$ 5・47

$42a_7\varepsilon^5+30a_6\varepsilon^4+20a_5\varepsilon^3+12a_4\varepsilon^2+6a_3\varepsilon+2a_2=0$ 5・48

$210a_7\varepsilon^4-120a_6\varepsilon^3+60a_5\varepsilon^2-24a_4\varepsilon+6a_3=0$ 5・49

$210a_7\varepsilon^4+120a_6\varepsilon^3+60a_5\varepsilon^2+24a_4\varepsilon+6a_3=0$ 5・50

{式5・49+式5・50}÷12　$35a_7\varepsilon^4+10a_5\varepsilon^2+a_3=0$ 5・51

{式5・50−式5・49}÷12　$20a_6\varepsilon^3+4a_4\varepsilon=0$

$a_4=-5a_6\varepsilon^2$ 5・52

{式5・47+式5・48}÷4　$15a_6\varepsilon^4+6a_4\varepsilon^2+a_2=0$ 5・53

{式5・48−式5・47}÷4　$21a_7\varepsilon^5+10a_5\varepsilon^3+3a_3\varepsilon=0$ 5・54

式5・52を式5・53に代入　$15a_6\varepsilon^4+6\cdot(-5a_6\varepsilon^2)\varepsilon^2+a_2=0$

$a_2=15a_6\varepsilon^4$ 5・55

式5・51×3−式5・54÷ε　$84a_7\varepsilon^4+20a_5\varepsilon^2=0$

$a_5=-\frac{21}{5}a_7\varepsilon^2$ 5・56

式5・51−式5・54÷ε　$14a_7\varepsilon^4-2a_3=0$

$a_3=7a_7\varepsilon^4$ 5・57

{式5・45+式5・46}÷2　$7a_7\varepsilon^6+5a_5\varepsilon^4+3a_3\varepsilon^2+a_1=\frac{1}{2}$ 5・58

{式5・46−式5・45}÷2　$6a_6\varepsilon^5+4a_4\varepsilon^3+2a_2\varepsilon+=\frac{1}{2}$ 5・59

式5・52、式5・55を式5・59に代入　$6a_6\varepsilon^5+4(-5a_6\varepsilon^2)\varepsilon^3+2(15a_6\varepsilon^4)\varepsilon+=\frac{1}{2}$

$a_6=\frac{1}{32\varepsilon^5}$ 5・60

式5・56、式5・57を式5・58に代入　$7a_7\varepsilon^6+5(-\frac{21}{5}a_7\varepsilon^2)\varepsilon^4+3(7a_7\varepsilon^4)\varepsilon^2+a_1=\frac{1}{2}$

$7a_7\varepsilon^6+a_1=\frac{1}{2}$

$a_1=\frac{1}{2}-7a_7\varepsilon^6$ 5・61

{式5・43+式5・44}÷2　$a_6\varepsilon^6+a_4\varepsilon^4+a_2\varepsilon^2+a_0=\frac{\varepsilon}{2}$ 5・62

{式5・44−式5・43}÷2ε　$a_7\varepsilon^6+a_5\varepsilon^4+a_3\varepsilon^2+a_1=\frac{1}{2}$ 5・63

式5・56、式5・57、式5・61を式5・63に代入　$a_7\varepsilon^6+(-\frac{21}{5}a_7\varepsilon^2)\varepsilon^4+(7a_7\varepsilon^4)\varepsilon^2+\frac{1}{2}-7a_7\varepsilon^6=\frac{1}{2}$

$-\frac{16}{5}a_7\varepsilon^6=0$

$a_7=0$ 5・64

式5・64を式5・61に代入　$a_1=\frac{1}{2}$ 5・65

式5・64を式5・57に代入　$a_3=0$ 5・66

式5・64を式5・56に代入　$a_5=0$ 5・67

式5・60を式5・55に代入　$a_2=15(\frac{1}{32\varepsilon^5})\varepsilon^4=\frac{15}{32\varepsilon}$ 5・68

式5・60を式5・52に代入　$a_4=-5(\frac{1}{32\varepsilon^5})\varepsilon^2=-\frac{5}{32\varepsilon^3}$ 5・69

式5・62に式5・60、式5・69、式5・68を代入　$(\frac{1}{32\varepsilon^5})\varepsilon^6+(-\frac{5}{32\varepsilon^3})\varepsilon^4+(\frac{15}{32\varepsilon})\varepsilon^2+a_0=\frac{\varepsilon}{2}$

$a_0=\frac{5}{32}\varepsilon$ 5・70

式5・64、式5・60、式5・67、式5・69、式5・66、式5・68、式5・65、式5・70を式5・42に代入すると式4・88(88頁参照)が得られる。

$F(x)=\frac{1}{32\varepsilon^5}x^6-\frac{5}{32\varepsilon^3}x^4+\frac{15}{32\varepsilon}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{32}\varepsilon\quad(-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon)$ 4・88(再掲)

式5・42は7次式と仮定していたが、7次の項の係数が0であることを式5・64が示しているので、結果的に式4・88は6次式である。

[緩和曲線]

図5-2の式4・88近似関数は図1-17の部分ACBの凝視関数(23頁参照)が起源であるが、緩和曲線から図5-2の近似関数を着想することもできる。道

路や鉄道の設計の過程において路線設置を行う。地形や土地利用の状況を勘案しながら、起点から終点まで接続する。初めに図5-3のAEDのよう

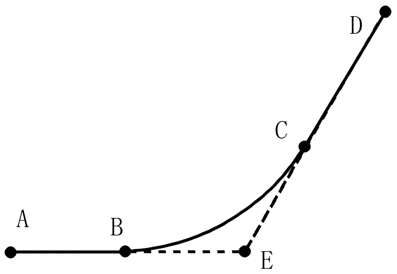

図5-3　直線と円弧の接続

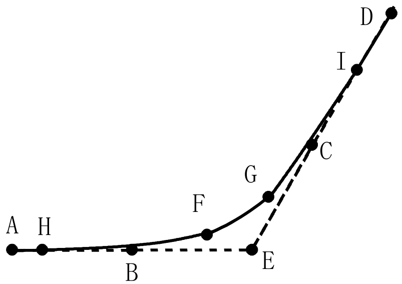

図5-4　緩和曲線の挿入

に直線を連ねて接続する。点Eで折れ曲がっているので、円弧BCを挟んで滑らかに接続する。車両が直線部ABを進行するときは、進行方向に垂直の向きの力は作用しないが、円弧BC部では遠心力が働き、進行方向に垂直の向きの力が作用する。路線ABCDを進行するとき、円弧BCの半径rとすると、点Bで曲率が0から$\frac{1}{r}$に不連続に急増する。速度が一定であれば、遠心力は曲率に比例するから、点Bで遠心力が急増し、乗り心地を害し危険である。遠心力の急増を避けるために、図5-4のように円弧BCの一部FGだけを残し、点Bより点Aに近い点Hから点Fまで、滑らかに曲率を変化させる。曲線HFを緩和曲線と呼ぶ。曲線GIも緩和曲線である。道路の設計ではクロソイド曲線が緩和曲線として用いられている。図5-2の区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$の曲線も折れ曲がった直線を滑らかに接続しており、図5-4の曲線HFGIと類似している。図5-4の曲線は円弧FGを介在させているが、図5-2の曲線は円弧を介在させていない。図5-4の曲線で円弧FGの長さを段々と短くし、0になった状況を考えると、図5-2の曲線が得られる。直線と円弧を滑らかに接続するのが緩和曲線であるが、図5-2の曲線も緩和曲線と類似の働きをしていると考えて良い。式4･87、式4･88、式4･89の関数F(x)が式5･31、式5･32の関数f(x)の近似関数と考えると、式5･31、式5･32の関数f(x)は点x＝0においても微分可能であると考えることができる。式5･31、式5･32の関数f(x)の微分不能な部分に、緩和曲線と類似の働きをする式4･88の曲線を挿入することにより、微分可能にすることができる。

[導関数]

式4･88を微分すると、式5･71が得られる。

$$F'(x)=\frac{3}{16\varepsilon^5}x^5-\frac{5}{8\varepsilon^3}x^3+\frac{15}{16\varepsilon}x+\frac{1}{2}\qquad(-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon)\qquad 5\cdot71$$

式5･71は式4･14と同じであり、式5･31、式5･32の関数f(x)の導関数がヘビサイド関数η(x)になることを示唆している。

(3)　ディラック関数の四次関数で表された近似関数

[想定]

ディラック関数の近似関数Δ(x)を式5･72の整冪多項式と式4･12の(74頁参照)定数関数で表す。

$$\Delta(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0\qquad(-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon)\qquad 5\cdot72$$

$$\Delta(x)=0\qquad(-\infty<x\leqq-\varepsilon、+\varepsilon\leqq x<+\infty)\qquad 4\cdot12(再掲)$$

式5･72がn次とすると、未定係数はa_n、a_{n-1}、・・・、a_1、a_0のn+1個であり、係数を決定するためにn+1個の条件が必要である。図5-5に示すように、

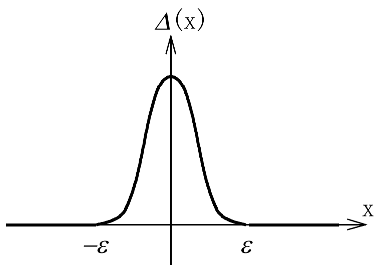

図5-5 四次または六次の近似関数Δ(x)

$$\Delta(-\varepsilon)=0\qquad 5\cdot73$$

$$\Delta(\varepsilon)=0\qquad 5\cdot74$$

$$\Delta'(-\varepsilon)=0\qquad 5\cdot75$$

$$\Delta'(\varepsilon)=0\qquad 5\cdot76$$

・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)\,dx=1\qquad 5\cdot77$$

点x＝$-\varepsilon$と点x＝εで式4･12と滑らかに接続するから、$\Delta(-\varepsilon)$と$\Delta(\varepsilon)$についての条件、$\Delta'(-\varepsilon)$と$\Delta'(\varepsilon)$についての条件、$\Delta''(-\varepsilon)$と$\Delta''(\varepsilon)$についての条件、・・・を満足すべきであり、さらに曲線とx軸で囲まれた面積が1である条件が必要であり、条件数が奇数である。導関数の階数について低い方から第m階までの条件を用いることにすると、条件数は2m+3個であ

る。第1階導関数までの条件を用いることにすると、m＝1、条件数は5個であり、式5･73～式5･76、式5･77が条件である。条件数n+1＝5であるから、n＝4であり、式5･72でn＝4とすると、式5･78が得られ、関数Δ(x)は4次である。

$$\Delta(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad 5\cdot78$$

［未定係数の決定］

式5･73～式5･76、式5･77に式5･78を代入すると、式5･79～式5･83が得られる。

$$a_4\varepsilon^4-a_3\varepsilon^3+a_2\varepsilon^2-a_1\varepsilon+a_0=0 \qquad 5\cdot79$$

$$a_4\varepsilon^4+a_3\varepsilon^3+a_2\varepsilon^2+a_1\varepsilon+a_0=0 \qquad 5\cdot80$$

$$-4a_4\varepsilon^3+3a_3\varepsilon^2-2a_2\varepsilon+a_1=0 \qquad 5\cdot81$$

$$4a_4\varepsilon^3+3a_3\varepsilon^2+2a_2\varepsilon+a_1=0 \qquad 5\cdot82$$

$$\left[\frac{1}{5}a_4x^5+\frac{1}{4}a_3x^4+\frac{1}{3}a_2x^3+\frac{1}{2}a_1x^2+a_0x\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=1 \qquad 5\cdot83$$

｛式5･79+式5･80｝÷2　$a_4\varepsilon^4+a_2\varepsilon^2+a_0=0$　5･84

｛式5･80−式5･79｝÷2　$a_3\varepsilon^3+a_1\varepsilon=0$　5･85

｛式5･81+式5･82｝÷2　$3a_3\varepsilon^2+a_1=0$　5･86

｛式5･82−式5･81｝÷2　$4a_4\varepsilon^3+2a_2\varepsilon=0$　5･87

式5･85より　$a_1=-a_3\varepsilon^2$　5･88

式5･86より　$a_1=-3a_3\varepsilon^2$　5･89

式5･88、式5･89より　$a_3=0$　5･90

式5･88、式5･90より　$a_1=0$　5･91

式5･87より　$a_2=-2a_4\varepsilon^2$　5･92

式5･92を式5･84に代入　$a_4\varepsilon^4-2a_4\varepsilon^2\cdot\varepsilon^2+a_0=0$

$$a_0=a_4\varepsilon^4 \qquad 5\cdot93$$

式5･90、式5･91、式5･92、式5･93を式5･83に代入

$$\left[\frac{1}{5}a_4x^5+\frac{1}{3}(-2a_4\varepsilon^2)x^3+a_4\varepsilon^4x\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=1$$

$$\frac{1}{5}a_4\{\varepsilon^5-(-\varepsilon^5)\}-\frac{2}{3}a_4\varepsilon^2\{\varepsilon^3-(-\varepsilon^3)\}+a_4\varepsilon^4\{\varepsilon-(-\varepsilon)\}=1$$

$$\frac{2\times(3-10+15)}{15}a_4\varepsilon^5=1$$

$$a_4=\frac{15}{16\varepsilon^5} \qquad 5\cdot94$$

式5･94を式5･92に代入　$a_2=-2\cdot\frac{15}{16\varepsilon^5}\cdot\varepsilon^2=-\frac{15}{8\varepsilon^3}$　5･95

式5･94を式5･93に代入　$a_0=\frac{15}{16\varepsilon^5}\cdot\varepsilon^4=\frac{15}{16\varepsilon}$　5･96

式5･94、式5･90、式5･95、式5･91、式5･96を式5･78に代入すると、式4･11が(74頁参照)得られる。

$$\Delta(x)=\frac{15}{16\varepsilon^5}x^4-\frac{15}{8\varepsilon^3}x^2+\frac{15}{16\varepsilon}=\frac{15}{16\varepsilon^5}(x^4-2\varepsilon^2x^2+\varepsilon^4)$$

$$=\frac{15}{16\varepsilon^5}(x^2-\varepsilon^2)^2=\frac{15}{16\varepsilon^5}(x-\varepsilon)^2(x+\varepsilon)^2 \qquad 4\cdot11（再掲）$$

式4･11、式4･12(116頁参照)が近似関数Δ(x)である。

式4･14の関数H(x)を微分すると、式5･97が得られる。

$$H'(x)=\frac{15}{16\varepsilon^5}x^4-\frac{15}{8\varepsilon^3}x^2+\frac{15}{16\varepsilon}=\frac{15}{16\varepsilon^5}(x-\varepsilon)^2(x+\varepsilon)^2 \qquad 5\cdot97$$

式5･97と式4･11が同じであり、ヘビサイド関数η(x)の導関数がディラック関数δ(x)になることを示唆している。汎関数型の超関数における式2･130(52頁参照)が連想される。

(4)　ディラック関数の六次関数で表された近似関数

［次数の決定］

ディラック関数の近似関数Δ(x)が式5･72の整冪多項式と式4･12の定数関数で表されているとき、式5･72の未定係数はa_n、a_{n-1}、・・・、a_1、a_0のn+1個であり、係数を決定するためにn+1個の条件が必要である。図5-5に示すように点x＝−εと点x＝εで式4･12と滑らかに接続するから、$\Delta(-\varepsilon)$と$\Delta(\varepsilon)$についての条件、$\Delta'(-\varepsilon)$と$\Delta'(\varepsilon)$についての条件、$\Delta''(-\varepsilon)$と$\Delta''(\varepsilon)$についての条件、・・・を満足すべきであり、さらに曲線とx軸で囲まれた面積が1である条件が必要であり、条件数が奇数である。導関数の階数について低い方から第m階までの条件を用いることにすると、

条件数は2m+3個である。第2階導関数までの条件を用いることにすると、m＝2、条件数は7個であり、式5・73～式5・76、式5・77に加えて式5・98、式5・99が条件である。

$\Delta''(-\varepsilon)=0$　　5・98

$\Delta''(\varepsilon)=0$　　5・99

条件数n+1＝7であるから、n＝6であり、式5・72でn＝6とすると、式5・100が得られ、関数$\Delta(x)$は6次である。

$\Delta(x)=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$　　5・100

式5・73～5・76、式5・98、式5・99、式5・77に式5・100を代入すると、式5・101～式5・107が得られる。

$a_6\varepsilon^6-a_5\varepsilon^5+a_4\varepsilon^4-a_3\varepsilon^3+a_2\varepsilon^2-a_1\varepsilon+a_0=0$　　5・101

$a_6\varepsilon^6+a_5\varepsilon^5+a_4\varepsilon^4+a_3\varepsilon^3+a_2\varepsilon^2+a_1\varepsilon+a_0=0$　　5・102

$-6a_6\varepsilon^5+5a_5\varepsilon^4-4a_4\varepsilon^3+3a_3\varepsilon^2-2a_2\varepsilon+a_1=0$　　5・103

$6a_6\varepsilon^5+5a_5\varepsilon^4+4a_4\varepsilon^3+3a_3\varepsilon^2+2a_2\varepsilon+a_1=0$　　5・104

$30a_6\varepsilon^4-20a_5\varepsilon^3+12a_4\varepsilon^2-6a_3\varepsilon+2a_2=0$　　5・105

$30a_6\varepsilon^4+20a_5\varepsilon^3+12a_4\varepsilon^2+6a_3\varepsilon+2a_2=0$　　5・106

$\left[\frac{1}{7}a_6x^7+\frac{1}{6}a_5x^6+\frac{1}{5}a_4x^5+\frac{1}{4}a_3x^4+\frac{1}{3}a_2x^3+\frac{1}{2}a_1x^2+a_0x\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=1$　　5・107

{式5・105+式5・106}÷4　　$15a_6\varepsilon^4+6a_4\varepsilon^2+a_2=0$　　5・108

{式5・106−式5・105}÷4　　$10a_5\varepsilon^2+3a_3=0$　　5・109

{式5・103+式5・104}÷2　　$5a_5\varepsilon^4+3a_3\varepsilon^2+a_1=0$　　5・110

{式5・104−式5・103}÷4　　$3a_6\varepsilon^4+2a_4\varepsilon^2+a_2=0$　　5・111

{式5・101+式5・102}÷2　　$a_6\varepsilon^6+a_4\varepsilon^4+a_2\varepsilon^2+a_0=0$　　5・112

{式5・102−式5・101}÷2ε　　$a_5\varepsilon^4+a_3\varepsilon^2+a_1=0$　　5・113

{式5・110−式5・113}÷2ε²　　$2a_5\varepsilon^2+a_3=0$　　5・114

式5・109−式5・114×3より　　$4a_5\varepsilon^2=0$

$a_5=0$　　5・115

式5・114へ式5・115を代入　　$a_3=0$　　5・116

式5・113へ式5・115、式5・116を代入　　$a_1=0$　　5・117

式5・108−式5・111より　　$3a_6\varepsilon^2+a_4=0$

$a_4=-3a_6\varepsilon^2$　　5・118

式5・111へ式5・118を代入　　$3a_6\varepsilon^4+2(-3a_6\varepsilon^2)\varepsilon^2+a_2=0$

$a_2=3a_6\varepsilon^4$　　5・119

式5・112へ式5・118、式5・119を代入　　$a_6\varepsilon^6+(-3a_6\varepsilon^2)\varepsilon^4+(3a_6\varepsilon^4)\varepsilon^2+a_0=0$

$a_0=-a_6\varepsilon^6$　　5・120

式5・115、式5・116、式5・117、式5・118、式5・119、式5・120を式5・107に代入

$\left[\frac{1}{7}a_6x^7+\frac{1}{5}(-3a_6\varepsilon^2)x^5+\frac{1}{3}(3a_6\varepsilon^4)x^3+(-a_6\varepsilon^6)x\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=1$

$\left\{\frac{1}{7}a_6\cdot2\varepsilon^7+\frac{1}{5}(-3a_6\varepsilon^2)\cdot2\varepsilon^5+\frac{1}{3}(3a_6\varepsilon^4)\cdot2\varepsilon^3+(-a_6\varepsilon^6)\cdot2\varepsilon\right\}=1$

$\frac{5-21}{35}a_6\cdot2\varepsilon^7+2a_6\varepsilon^7-2a_6\varepsilon^7=1$

$a_6=-\frac{35}{32\varepsilon^7}$　　5・121

式5・118へ式5・121を代入　　$a_4=-3\left(-\frac{35}{32\varepsilon^7}\right)\varepsilon^2=\frac{105}{32\varepsilon^5}$　　5・122

式5・119へ式5・121を代入　　$a_2=3\left(-\frac{35}{32\varepsilon^7}\right)\varepsilon^4=-\frac{105}{32\varepsilon^3}$　　5・123

式5・120へ式5・121を代入　　$a_0=-\left(-\frac{35}{32\varepsilon^7}\right)\varepsilon^6=\frac{35}{32\varepsilon}$　　5・124

式5・121、式5・115、式5・122、式5・116、式5・123、式5・117、式5・124を式5・100に代入すれば式5・125が得られる。

$\Delta(x)=-\frac{35}{32\varepsilon^7}x^6+\frac{105}{32\varepsilon^5}x^4-\frac{105}{32\varepsilon^3}x^2+\frac{35}{32\varepsilon}=-\frac{35}{32\varepsilon^7}(x^6-3\varepsilon^2x^4+3\varepsilon^4x^2-\varepsilon^6)$

$=-\frac{35}{32\varepsilon^7}(x^2-\varepsilon^2)^3=-\frac{35}{32\varepsilon^7}(x-\varepsilon)^3(x+\varepsilon)^3$　　5・125

式5・125、式4・12(116頁参照)が近似関数$\Delta(x)$である。

(5)　ディラック関数の2n次関数で表された近似関数

[予想]

式4・11、式5・125をみると2n次の近似関数$\Delta(x)$は$(x-\varepsilon)^n(x+\varepsilon)^n$を因数に持つと推測される。

$\Delta(x)=\frac{15}{16\varepsilon^5}(x-\varepsilon)^2(x+\varepsilon)^2$　　　　4･11(再掲)

$\Delta(x)=-\frac{35}{32\varepsilon^7}(x-\varepsilon)^3(x+\varepsilon)^3$　　　　5･125(再掲)

式5･126の関数yはnが偶数のとき、図5-6のように区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$で上に凸、nが奇数のとき、図5-7のように区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$で下に凸である。

$y=(x-\varepsilon)^n(x+\varepsilon)^n$　　　　5･126

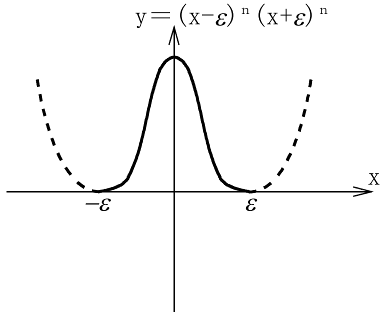

図5-6　nが偶数

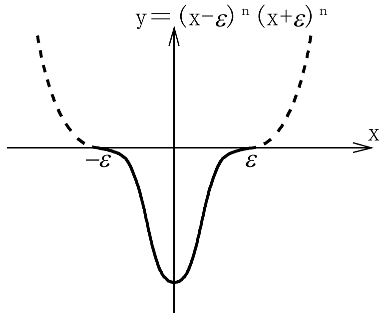

図5-7　nが奇数

図5-6、図5-7の点線部分を式4･12で置き換えて近似関数$\Delta(x)$を考える。定数Kを用いて式5･127で近似関数$\Delta(x)$を表すと、区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$でx軸と近似関数$\Delta(x)$で囲まれた面積が1であるから、式5･77が成り立つ。

$\Delta(x)=K(x-\varepsilon)^n(x+\varepsilon)^n\quad(-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon)$　　　　5･127

$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta(x)dx=1$　　　　5･77(再掲)

定数Kは独立変数xを含まないので定数であるが、補助変数εとnを含む。nが偶数のときにKは正、nが奇数のときにKは負である。Kが負であれば、関数$\Delta(x)$は図5-7をx軸に関して上下対称にした形になる。式5･127を式5･77に代入すると、式5･128が得られる。

$\frac{1}{K}=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x-\varepsilon)^n(x+\varepsilon)^n dx$　　　　5･128

[漸化式を用いた計算]

定数Kを求めるために、$(x+\varepsilon)^{m+1}(x-\varepsilon)^n$を微分し、式5･129の両辺を区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$で積分する。

$\{(x+\varepsilon)^{m+1}(x-\varepsilon)^n\}'=(m+1)(x+\varepsilon)^m(x-\varepsilon)^n+n(x+\varepsilon)^{m+1}(x-\varepsilon)^{n-1}$　　　　5･129

$$[(x+\varepsilon)^{m+1}(x-\varepsilon)^n]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=(m+1)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^m(x-\varepsilon)^n dx+n\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^{m+1}(x-\varepsilon)^{n-1}dx$$

左辺が0であるから、式5･130が成り立つ。

$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^m(x-\varepsilon)^n dx=\frac{-n}{m+1}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^{m+1}(x-\varepsilon)^{n-1}dx$　　　　5･130

式5･130の右辺の積分を左辺の積分と比べると、mがm+1になり、nがn-1になっており、漸化式である。式5･131でJ(m、n)を定義すると、式5･130は式5･132になる。

$J(m,n)=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^m(x-\varepsilon)^n dx$　　　　5･131

$J(m,n)=\frac{-n}{m+1}J(m+1,n-1)$　　　　5･132

式5･132を再帰的に用いると、式5･133、・・・、式5･134が成り立つ。

$J(m+1,n-1)=\frac{-(n-1)}{m+2}J(m+2,n-2)$　　　　5･133

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$J(m+n-1,1)=\frac{-1}{m+n}J(m+n,0)$　　　　5･134

式5･132、式5･133、・・・、式5･134から式5･135が成り立つ。

$$J(m,n)=\left(\frac{-n}{m+1}\right)\left\{\frac{-(n-1)}{m+2}\right\}\cdots\left(\frac{-2}{m+n-1}\right)\left(\frac{-1}{m+n}\right)J(m+n,0)$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{n!\cdot m!}{(m+n)!}\cdot J(m+n,0)\qquad 5･135$$

式5･135にm＝nを代入すると、式5･136が成り立つ。

$J(n,n)=\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!}J(2n,0)$　　　　5･136

式5･131の定義から、式5･136は式5･137を意味する。

$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^n(x-\varepsilon)^n dx=\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^{2n}dx$　　　　5･137

式5･137の右辺の積分は式5･138のように計算される。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}\left[(x+\varepsilon)^{2n+1}\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=\frac{1}{2n+1}\{(2\varepsilon)^{2n+1}-0\}$$

$$=\frac{2^{2n+1}\varepsilon^{2n+1}}{2n+1} \qquad 5\cdot138$$

式5・137に式5・138を代入すると、式5・139が成り立つ。

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^{n}(x-\varepsilon)^{n}dx=\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!}\times\frac{2^{2n+1}\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=\frac{(-1)^n(n!)^2 2^{2n+1}\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad 5\cdot139$$

式5・128と式5・139から式5・140が得られる。nが偶数のときKは正、nが奇数のときKは負である。

$$K=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}\varepsilon^{2n+1}} \qquad 5\cdot140$$

式5・140を式5・127に代入すると、式5・141が得られる。

$$\Delta(x)=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}\varepsilon^{2n+1}}(x-\varepsilon)^n(x+\varepsilon)^n \qquad (-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon) \qquad 5\cdot141$$

$$\Delta(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq-\varepsilon,+\varepsilon\leqq x<+\infty) \qquad 4\cdot12(再掲)$$

式5・141、式4・12が近似関数$\Delta(x)$である。式5・141にn＝2を代入すると式4・11が得られ、n＝3を代入すると5・125が得られる。

［二項展開を用いた計算］

定数Kは式5・140と異なる形で表現することもできる。二項展開して式5・142が得られ、項別に積分して式5・143が得られる。

$$(x+\varepsilon)^n(x-\varepsilon)^n=(x^2-\varepsilon^2)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k x^{2(n-k)}\varepsilon^{2k}(-1)^k \qquad 5\cdot142$$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(x+\varepsilon)^{n}(x-\varepsilon)^{n}dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k\varepsilon^{2k}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}x^{2n-2k}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k\varepsilon^{2k}\frac{1}{2n-2k+1}\left[x^{2n-2k+1}\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k{}_nC_k\varepsilon^{2k}}{2n-2k+1}\{\varepsilon^{2n-2k+1}-(-\varepsilon)^{2n-2k+1}\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2{}_nC_k\varepsilon^{2n+1}}{2n-2k+1}=2\varepsilon^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k{}_nC_k}{2n-2k+1} \qquad 5\cdot143$$

式5・128と式5・143から、式5・144が得られる。

$$\frac{1}{K}=2\varepsilon^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k{}_nC_k}{2n-2k+1} \qquad 5\cdot144$$

式5・140、式5・144にn＝0、1、2、・・・、7を代入すれば表5=1が得られる。表5=1のKを用いて、式5・127と式4・12が近似関数$\Delta(x)$である。

$$\Delta(x)=K(x+\varepsilon)^n(x-\varepsilon)^n \qquad (-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon) \qquad 5\cdot127(再掲)$$

$$\Delta(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq-\varepsilon,+\varepsilon\leqq x<+\infty) \qquad 4\cdot12(再掲)$$

表5=1　nとKの関係

n	(0)	(1)	2	3	4	5	6	7
K	$\frac{1}{2\varepsilon}$	$-\frac{3}{4\varepsilon^3}$	$\frac{15}{16\varepsilon^5}$	$-\frac{35}{32\varepsilon^7}$	$\frac{315}{1024\varepsilon^9}$	$-\frac{693}{2048\varepsilon^{11}}$	$\frac{431}{8192\varepsilon^{13}}$	$-\frac{429}{16384\varepsilon^{15}}$

表5=1でn＝0、1については式5・127と式4・12が滑らかに接続しないけれど、式5・140、式5・144に代入して得た値を参考のために記載してある。表5=1でn＝2、3、4、・・・については式5・127と式4・12が滑らかに接続する。表5=1には記載していないが、n＝8、9、10、・・・についても計算できる。

(5)　微分不能な近似関数

表5=1でn＝0とした場合、式5・127と式4・12は式5・145と式4・12になり、図5-8のように図示される。

$$\Delta(x)=\frac{1}{2\varepsilon} \qquad (-\varepsilon<x<+\varepsilon) \qquad 5\cdot145$$

$$\Delta(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq-\varepsilon,+\varepsilon\leqq x<+\infty) \qquad 4\cdot12(再掲)$$

表5=1でn＝1とした場合、式5・127と式4・12は式5・146と式4・12になり、図5-9のように図示される。

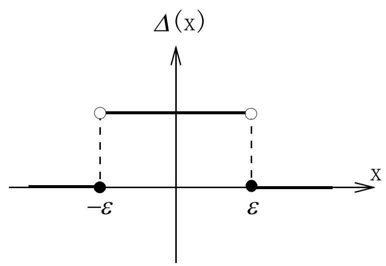

図5-8　n＝0

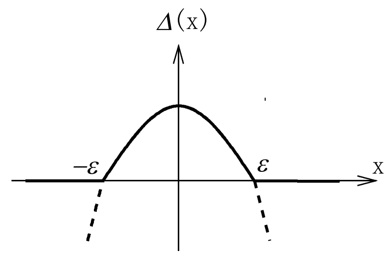

図5-9　n＝1

$$\Delta(x)=-\frac{3}{4\varepsilon^3}(x+\varepsilon)(x-\varepsilon) \qquad (-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon) \qquad 5\cdot146$$

$$\Delta(x)=0 \qquad (-\infty < x \leqq -\varepsilon、+\varepsilon \leqq x < +\infty) \qquad 4\cdot12(再掲)$$

式5･145と式4･12の$\Delta(x)$は点$x=-\varepsilon$、$x=+\varepsilon$において不連続である。式5･146と式4･12の$\Delta(x)$は点$x=-\varepsilon$、$x=+\varepsilon$において折れ曲がっており、微分不能である。点$x=-\varepsilon$と点$x=+\varepsilon$において$\Delta(x)$は、式5･146からの計算と式4･12からの計算が同じなのに対し、式5･145からの計算と式4･12からの計算が異なる。微分を考える必要がなく、式3･39～式3･43だけで超関数$\delta(x)$の成分と関連付けられれば良いのであれば、式5･145と式4･12の$\Delta(x)$と式5･146と式4･12の$\Delta(x)$も近似関数になり得る。

$$\delta_h(0)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\Delta(-\rho) \qquad 3\cdot39(再掲)$$

$$\delta_d(0)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\{\Delta(+\rho)-\Delta(-\rho)\} \qquad 3\cdot40(再掲)$$

$$\delta_1(0)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx \qquad 3\cdot41(再掲)$$

$$\delta_2(0)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\rho}^{+\rho}x\Delta(x)\,dx \qquad 3\cdot42(再掲)$$

$$\delta_n(0)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\rho}^{+\rho}x^{n-1}\Delta(x)\,dx \qquad (n=3、4、5、\cdots) \qquad 3\cdot43(再掲)$$

式5･145や式5･146を用いる場合に備えて、n＝0とn＝1の場合も参考のために表5=1に掲げてある。式5･127、式4･12で表される訳ではないが、式2･44、式2･45の関数$\Delta(x)$(52頁参照)も不連続な近似関数である。

(6)　ディラック関数の近似関数の導関数

式5･141、式4･12の近似関数$\Delta(x)$を微分すると、式5･147、式5･148の関数$\Delta'(x)$が得られる。

$$\Delta'(x)=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}\varepsilon^{2n+1}}\{n(x+\varepsilon)^{n-1}(x-\varepsilon)^n+n(x+\varepsilon)^n n(x-\varepsilon)^{n-1}\}$$

$$=2\frac{(-1)^n(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}\varepsilon^{2n+1}}nx(x+\varepsilon)^{n-1}(x-\varepsilon)^{n-1} \qquad (-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon) \qquad 5\cdot147$$

$$\Delta'(x)=0 \qquad (-\infty < x \leqq -\varepsilon、+\varepsilon \leqq x < +\infty) \qquad 5\cdot148$$

式5･147の関数$\Delta'(x)$はnが偶数のとき図5-10のように図示され、nが奇

数のとき図5-11のように図示される。点線の部分は式5･148で置き換える。

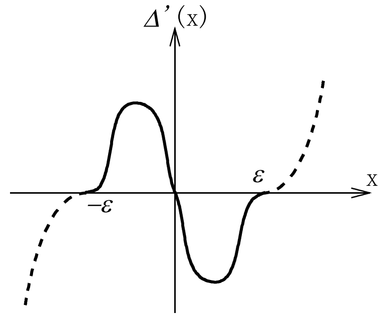

図5-10　nが偶数

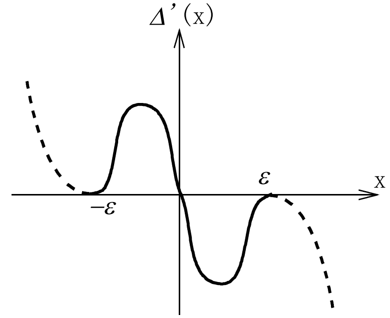

図5-11　nが奇数

式5･147、式5･148の関数$\Delta'(x)$がディラック関数$\delta(x)$の導関数$\delta'(x)$の近似関数の１つである。式3･65、式3･66のディラック関数$\delta(x)$に対して導関数$\delta'(x)$は式5･149、式5･150で表される。

$$\delta'(x)=(0,0,0,-1,0,0,\cdot\cdot\cdot) \qquad (x=0) \qquad 5\cdot149$$

$$\delta'(x)=(0,0,0,0,0,0,\cdot\cdot\cdot) \qquad (x\neq0) \qquad 5\cdot150$$

(7)　有限回微分可能な近似関数

汎関数型の超関数の理論において、超関数は近似関数の性質を引き継ぐので近似関数が微分可能であれば、超関数も微分可能である。ディラック関数$\delta(x)$の近似関数$\Delta(x)$として、式2･61が用いられる場合が多いが、式2･61は無限回微分可能である。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad 2\cdot61(再掲)$$

ディラック関数$\delta(x)$の区間$x\neq0$における状況が式2･108、式2･109により説明されるが、式2･61は区間$-\infty<x<+\infty$で0にならず、式5･151が成り立つので、式2･108、式2･109の状況を直感的に理解することは難しい。

$$\delta(x)=0 \qquad (0<x<+\infty) \qquad 2\cdot108(再掲)$$

$$\delta(x)=0 \qquad (-\infty<x<0) \qquad 2\cdot109(再掲)$$

$$\Delta(x)>0 \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad 5\cdot151$$

ディラック関数$\delta(x)$の近似関数$\Delta(x)$として、式5･125、式4･12を用いる

ことができるが、式5・125、式4・12は点$x=-\varepsilon$、$x=+\varepsilon$において滑らかに接続し、2回微分可能である。

$$\Delta(x)=-\frac{35}{32\varepsilon^7}(x-\varepsilon)^3(x+\varepsilon)^3 \qquad (-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon) \qquad 5\cdot125(\text{再掲})$$

$$\Delta(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq-\varepsilon,+\varepsilon\leqq x<+\infty) \qquad 4\cdot12(\text{再掲})$$

ディラック関数$\delta(x)$の区間$x\neq0$における状況が式2・99、式2・100により説明されるが、式4・12は区間$-\infty<x\leqq-\varepsilon$、$+\varepsilon\leqq x<+\infty$で0になるので、式2・108、式2・109の状況を直感的に理解し易い。式2・108、式2・109の状況を理解するためには、式2・61を近似関数$\Delta(x)$とするよりも式5・125、式4・12を近似関数とする方が適している。構造力学に適用することを考えると、ディラック関数$\delta(x)$は必ずしも無限回微分可能である必要はない。ディラック関数$\delta(x)$の導関数$\delta'(x)$と集中モーメントの関係が考察の対象となるので、導関数$\delta'(x)$が定義できれば良い。式5・152、式5・148の$\Delta'(x)$は、2点$x=-\varepsilon$、$x=+\varepsilon$において接続し、1回微分可能である。

$$\Delta'(x)=-\frac{105}{16\varepsilon^7}x(x-\varepsilon)^2(x+\varepsilon)^2 \qquad (-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon) \qquad 5\cdot152$$

$$\Delta'(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq-\varepsilon,+\varepsilon\leqq x<+\infty) \qquad 5\cdot148(\text{再掲})$$

式5・152は式5・147で$n=3$とすれば得られる。式5・152、式5・148の$\Delta'(x)$を用いて超関数$\delta'(x)$を定義することができ、構造力学に適用するときに、式5・125、式4・12の$\Delta(x)$をディラック関数$\delta(x)$の近似関数とすることができる。超関数$\delta'(x)$が定義できるためには、近似関数$\Delta(x)$が2回微分可能であることが必要である。

式5・141に$n=2$、3、4、・・・を代入したとき、2点$x=-\varepsilon$、$x=+\varepsilon$に着目すると、式5・141と式4・12の近似関数$\Delta(x)$は$n-1$回微分可能である。

$$\Delta(x)=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}\varepsilon^{2n+1}}(x-\varepsilon)^n(x+\varepsilon)^n \qquad (-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon) \qquad 5\cdot141(\text{再掲})$$

$$\Delta(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq-\varepsilon,+\varepsilon\leqq x<+\infty) \qquad 4\cdot12(\text{再掲})$$

構造力学に適用する場合には2回微分可能であることが必要であったが、必要な微分可能回数は超関数を用いて表現する現象によって異なる。理論の展開の中で更に高階の微分が必要になったときには、式5・141と式4・12の$\Delta(x)$を近似関数として、微分可能回数が$n-1$になるようにnを定

める。式5・141と式4・12の$\Delta(x)$は有限回微分可能であるが、任意にnを定めることができるから、事実上の無限回微分可能と考えて良い。理論の展開の中で微分する必要がなければ、式5・146と式4・12の$\Delta(x)$を近似関数として用いることができ、理論の展開の中で不連続でも良ければ、式5・145と式4・12の$\Delta(x)$を近似関数として用いることができる。

(8)　ヘビサイド関数の2n+1次関数で表された近似関数

式5・153を用いて式5・141と式4・12の近似関数$\Delta(x)$を積分すると、ヘビサイド関数の2n+1次関数で表された近似関数$H(x)$が得られる。

$$H(x)=\int_{-\varepsilon}^{x}\Delta(t)\,dt \qquad 5\cdot153$$

式5・141と式4・12の近似関数$\Delta(x)$は2n次関数で表されている。式5・153の積分により2n+1次関数になる。式4・13、式4・14、式4・15の近似関数$H(x)$は、式5・141と式4・12の近似関数$\Delta(x)$で$n=2$として式5・153で計算すると得られる。

(9)　右半分一次冪関数の2n+2次関数で表された近似関数

式5・154を用いて式5・153の近似関数$H(x)$を積分すると、右半分一次冪関数の2n+2次関数で表された近似関数$F(x)$が得られる。

$$F(x)=\int_{-\varepsilon}^{x}H(t)\,dt \qquad 5\cdot154$$

式5・153の近似関数$H(x)$は2n+1次関数で表されている。式5・154の積分により2n+2次関数になる。式4・87、式4・88、式4・89の近似関数$F(x)$は式式5・141と式4・12の近似関数$\Delta(x)$で$n=2$として式5・153、式5・154で計算すると得られる。