第4章　成分表示型の超関数

(1)　超関数の定義

［成分表示］

超関数$f(x)$は$n+2$個の成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・、$f_n(x)$を組にして、式4･1または式4･2で表す。

$$f(x)=\{f_h(x),f_d(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)\} \qquad 4･1$$

$$f(x)=f_h(x)+f_d(x)\;+f_1(x)\;+f_2(x)\;{}^{2}+\cdots+f_n(x)\;{}^{n} \qquad 4･2$$

式4･2は、記号1、　、　、　^{2}, ・・・、　^{n}・・・を基底ベクトルとし、関数$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・、$f_n(x)$を成分としたベクトル表現であり、関数擬値と呼ぶ。式4･1は成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・、$f_n(x)$を点,で区切り、括弧{}で包んだベクトル表現であり、関数配列と呼ぶ。$f_h(x)$を左連続成分、$f_d(x)$を段差成分、$f_1(x)$を第1次成分、$f_2(x)$を第2次成分、・・・、$f_n(x)$を第n次成分と呼ぶ。第n次成分が0でない値を持つ点に第n次の集中があると言う。汎関数型の超関数を変形して成分表示型で表現するときは$n=+\infty$であり、成分数が無限個である。構造力学の荷重分布を表現するときは$n=2$であり、成分数が4個である。第4章では特に言及しなければ成分無限個型の理論を考察することにする。

［変形］

汎関数型の超関数について、点半径変数を導入し、汎関数型の表示から入力関数を消去すれば、成分表示型に変形できる。力学的な複視点関数について、点半径を定数から補助変数に変更し、凝視関数を数式化し、凝視関数を近似関数に名称変更し、点半径変数から特異化変数を分離し、視点移動を極限変動に変更すれば、成分表示型の超関数に変形できる。

［特異点］

左連続成分$f_h(x)$以外の成分関数の全ての値が0である点が通常点であり、左連続成分$f_h(x)$以外の成分関数の中に0でない値を持つ成分がある点が特異点である。通常点は連続的に存在するが、特異点は離散的にし

か存在しない。

［表現方法の選択］

多くの成分が0でない値であれば、式4･1と式4･2はほとんど同じように見えるが、ディラック関数のように成分のほとんどが関数値0である場合にはかなり違って見える。関数配列で表現すれば式3･44のように成分数が無限個であることが明示される。

$$\delta(0)=(0,0,1,0,0,0,\cdots) \qquad 3･44(再掲)$$

式3･44で書き並べられた0が関数擬値で表現すれば、式4･3のように書かれないので簡潔であるるが、成分数が無限個であることが曖昧になる。

$$\delta(0)= \qquad 4･3$$

点$x=0$に置かれた大きさ1の集中力$\lambda(x)$を関数配列で表わせば式3･34のように成分数が4個であることが明示され、式3･44と式3･34の違いは明瞭である。

$$\lambda(0)=(0,0,1,0) \qquad 3･34(再掲)$$

集中力$\lambda(x)$を関数擬値で表現すれば式4･4のように成分数が4個であることが曖昧になり、式4･3と式4･4は表面的には区別が付かない。

$$\lambda(0)= \qquad 4･4$$

表現の簡潔さを選ぶならば関数擬値が用いられ、成分数の明示を選ぶならば関数配列が用いられる。

［区分的に連続］

成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、・・・、$f_n(x)$、・・・は独立変数xの関数である。左連続成分$f_h(x)$は、不連続点を持たない場合と不連続点を持つ場合があるが、不連続点を持つ場合にも不連続点は離散的にしか存在せず、不連続点においても左連続である。不連続点によって区分された区間のそれぞれにおいて連続な関数は区分的に連続であると言う。左連続成分$f_h(x)$は区分的に連続である。定義域内のn個の点$x=c_1$、$x=c_2$、・・・、$x=c_n$において関数値が0でなく、それ以外の区間において関数値が0である関数を離散関数と呼ぶ。関数値が0でない点$x=c_1$、$x=c_2$、・・・、$x=c_n$は離散的に存在している。定義域の全域において関数値が0の定数

関数もn＝0と考え、離散関数に含めることにする。左連続成分以外の成分$f_d(x)$、$f_1(x)$、・・・、$f_n(x)$、・・・は離散関数である。関数値が0である区間に注目すると、離散関数は区分的に連続である。段差成分$f_d(x)$が0でない点においては左連続成分$f_h(x)$が不連続になる。

［定義域］

成分関数$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、・・・、$f_n(x)$、・・・の定義域と超関数f(x)の定義域が同じである。定義域は区間であり、表4=1に示す下端の表示と上端の表示で独立変数xを挟んで、超関数の定義域を$a \leqq x < b$、$a \leqq x < +\infty$のように表示する。

表4=1　超関数の定義域の端点

下端の表示	上端の表示
$a \leqq$	$\leqq b$
$a <$	$< b$
$-\infty <$	$< +\infty$

表4=2　近似関数の定義域の端点

下端の表示	上端の表示
$a-\rho \leqq$	$\leqq b+\rho$
$a+\rho \leqq$	$\leqq b-\rho$
$-\infty <$	$< +\infty$

近似関数F(x)は独立変数xと補助変数εの関数である。超関数f(x)が特異点x＝aを持つときは、$\varepsilon \to 0$の極限において関数値F(a)が収束しないので、補助変数εを特異化変数と呼ぶ。構造力学における図1-3、図1-8、図1-12の凝視関数の性質を引き継ぐので、特に言及しなければ、近似関数は定義域の全域において少なくとも1回微分可能であると想定する。式2·44、式2·45の関数$\Delta(x)$のような不連続関数を用いることは例外である。近似関数F(x)と超関数f(x)を関連付けるために点半径変数ρを用いる。表4=2に示す下端の表示と上端の表示で独立変数xを挟んで$a-\rho \leqq x \leqq b-\rho$、$a-\rho \leqq x < +\infty$のように近似関数F(x)の定義域を表示する。表4=1の$a \leqq$と表4=2の$a-\rho \leqq$が対応し、表4=1の$a <$と表4=2の$a+\rho \leqq$が対応している。

［判別条件］

超関数f(x)の成分と近似関数F(x)を式4·5～式4·8で関連付ける。

$$f_h(x) = \lim_{\rho \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} F(x-\rho) \qquad 4\cdot5$$

$$f_d(x) = \lim_{\rho \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \{F(x+\rho) - F(x-\rho)\} \qquad 4\cdot6$$

$$f_1(x) = \lim_{\rho \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x-\rho}^{x+\rho} F(t)\,dt \qquad 4\cdot7$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$f_n(x) = \lim_{\rho \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x-\rho}^{x+\rho} (t-x)^{n-1} F(t)\,dt \qquad 4\cdot8$$

・・・・・・・・・・・・・・

式4·8の左辺の添え字のnと右辺の冪指数n-1がずれていることに注意する。式4·5～式4·8の計算において、特異化変数εは点半径変数ρより速く極限変動する。式4·5～式4·8を式4·9または式4·10に代入して超関数f(x)を定義する。

$$f(x) = f_h(x) + f_d(x) + f_1(x) + \cdot\cdot\cdot + f_n(x)\,{}^{n} + \cdot\cdot\cdot \qquad 4\cdot9$$

$$f(x) = \{f_h(x), f_d(x), f_1(x), \cdot\cdot\cdot, f_n(x), \cdot\cdot\cdot\} \qquad 4\cdot10$$

逆に式4·9または式4·10が与えられたとき、式4·5～式4·8は多数の同等な近似関数が満足すべき判別条件である。汎関数型において式2·53が各点収束しない場合があるので式2·52の収束により超関数を定義するのに対して成分表示型においては式4·5～式4·8が必ず各点収束し、超関数を定義する。

［ディラック関数］

ディラック関数$\delta(x)$は式3·67、式3·68または式3·65、式3·66で定義される。

$$\delta(x) = \qquad (x=0) \qquad 3\cdot67（再掲）$$

$$\delta(x) = 0 \qquad (x \neq 0) \qquad 3\cdot68（再掲）$$

$$\delta(x) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, \cdot\cdot\cdot) \qquad (x=0) \qquad 3\cdot65（再掲）$$

$$\delta(x) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \cdot\cdot\cdot) \qquad (x \neq 0) \qquad 3\cdot66（再掲）$$

式3·67、式3·68が擬値表示であり、式3·65、式3·66が配列表示である。ディラック関数$\delta(x)$の近似関数$\Delta(x)$は無数に多く存在するが、式2·61の$\Delta(x)$や式4·11、式4·12の$\Delta(x)$はその例である。

$$\Delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad 2\cdot61（再掲）$$

$$\Delta(x) = \frac{15}{16\varepsilon^5} (x-\varepsilon)^2 (x+\varepsilon)^2 \qquad (-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon) \qquad 4\cdot11$$

$$\Delta(x) = 0 \qquad (-\infty < x \leqq -\varepsilon、+\varepsilon \leqq x < +\infty) \qquad 4\cdot12$$

[ヘビサイド関数]

　ヘビサイド関数η(x)は式3·72、式3·73、式3·74または式3·69、式3·70、式3·71で定義される。

η(x)＝0　　(x＜0)　　3·72(再掲)

η(x)＝　　(x＝0)　　3·73(再掲)

η(x)＝1　　(0＜x)　　3·74(再掲)

η(x)＝(0, 0, 0, 0, ・・・, 0, ・・・)　　(x＜0)　　3·69(再掲)

η(x)＝(0, 1, 0, 0, ・・・, 0, ・・・)　　(x＝0)　　3·70(再掲)

η(x)＝(1, 0, 0, 0, ・・・, 0, ・・・)　　(0＜x)　　3·71(再掲)

式3·72、式3·73、式3·74が擬値表示であり、式3·69、式3·70、式3·71が配列表示である。ヘビサイド関数η(x)の近似関数H(x)は無数に多く存在するが、式2·73のH(x)や式4·13、式4·14、式4·15のH(x)はその例である。

$$H(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{2}\right)dx \qquad 2·73(再掲)$$

$$H(x)=0 \qquad (x\leqq-\varepsilon) \qquad 4·13$$

$$H(x)=\frac{3}{16\varepsilon^{5}}x^{5}-\frac{5}{8\varepsilon^{3}}x^{3}+\frac{15}{16\varepsilon}x+\frac{1}{2} \qquad (-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon) \qquad 4·14$$

$$H(x)=1 \qquad (+\varepsilon\leqq x) \qquad 4·15$$

(2)　超関数と見なされる関数

[配列表示]

　汎関数型の理論において、式2·54の関数f(x)はそのままで超関数と見なされる。

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1 \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad 2·54(再掲)$$

式2·56の近似関数F(x)を式4·5～式4·8に代入して成分を求め、式4·10に代入すれば、成分無限個型の式4·16が得られる。

$$F(x)=\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x+(1+\varepsilon) \qquad 2·56(再掲)$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}x+1, 0, 0, 0, 0, ・・・\right) \qquad 4·16$$

式2·54と式4·16を見比べると、式4·17が得られる。

f(x)＝{f(x), 0, 0, 0, 0, ・・・}　　4·17

超関数は式2·52の極限操作で定義されるが、式2·53の極限が収束する場合には、式4·17が得られる。式4·17は一見すると不合理であるが、左辺のf(x)は配列表示の超関数であり、右辺のf(x)は関数であり、式4·18のように註記すると不合理は解消される。

(超関数)f(x)＝{(関数)f(x), 0, 0, 0, 0, ・・・}　　4·18

[擬値表示]

　式4·17を擬値表示すれば、式4·19のように計算される。

(超関数)f(x)＝(関数)f(x)·1+0·　+0·　+0·　^{2}+・・・

＝(関数)f(x)　　4·19

[零値推認]

　式2·53の極限が収束する超関数f(x)について、式4·18と式4·19は超関数f(x)と関数f(x)の関係を説明している。式4·18、式4·19のように厳密に考えなくとも、関数f(x)を左連続成分だけの成分1個型の超関数と考え、成分1個型の超関数f(x)と成分無限個型の超関数f(x)を、零値推認によって関係づける(64頁参照)ことにすれば、関数f(x)と超関数f(x)を同一視することができる。関数f(x)と超関数f(x)を同一視しても混乱することはないので、式4·17が受け入れられる。式4·17、式4·18、式4·19を区別無く、註記を省略して、用いて構わない。

[超関数の極限]

　超関数f(x)の極限は式4·20、式4·21を意味する。

$$f(x-0)=\lim_{\zeta\to0}f(x-\zeta) \qquad 4·20$$

$$f(x+0)=\lim_{\zeta\to0}f(x+\zeta) \qquad 4·21$$

通常点は連続的に存在するので、通常点xにおける極限の計算において、点x$-\zeta$と点x$+\zeta$の変動範囲は通常点であり、極限の左連続成分以外の成分は全て0である。特異点は離散的に存在するので、特異点xにおける極限の計算において、点x$-\zeta$と点x$+\zeta$の変動範囲は通常点であり、極限の

左連続成分以外の成分は全て0である。点xが特異点であっても通常点であっても、極限の左連続成分以外の成分は全て0である。近似関数F(t)の区間$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$が超関数f(t)の点t＝xに対応し、近似関数F(t)の点$t=x-\rho$が超関数f(t)の極限t＝x-0に対応するから、極限f(x-0)の左連続成分は超関数f(t)の左連続成分$f_h(x)$と同じになる。極限f(x-0)を配列表示すると、式4･22のように書かれる。

$$f(x-0)=\{f_h(x),0,0,0,0,\cdots\} \quad 4\cdot22$$

近似関数F(t)の区間$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$が超関数f(t)の点t＝xに対応し、近似関数F(t)の点$t=x+\rho$が超関数f(t)の極限t＝x+0に対応するから、極限f(x+0)の左連続成分は超関数f(t)の左連続成分$f_h(x)$と段差成分$f_d(x)$の和になる。極限f(x+0)を配列表示すると、式4･23のように書かれる。

$$f(x+0)=\{f_h(x)+f_d(x),0,0,0,0,\cdots\} \quad 4\cdot23$$

式4･22を擬値表示すれば式4･24のように書かれ、式4･23を擬値表示すれば式4･25のように書かれる。

$$f(x-0)=f_h(x) \quad 4\cdot24$$

$$f(x+0)=f_h(x)+f_d(x) \quad 4\cdot25$$

式4･22は式4･17と類似しており、極限についても零値推認によって、f(x-0)と$f_h(x)$を同一視しても混乱しない。式4･23も式4･17と類似しており、極限について零値推認によって、f(x+0)と$\{f_h(x)+f_d(x)\}$を同一視しても混乱しない。

(3)　成分数の異なる超関数の関係

[想定]

　式4･1で定義される成分n+2個型の超関数f(x)と式4･26で定義される成分n+m+2個型の超関数g(x)を比較する。

$$f(x)=\{f_h(x),f_d(x),f_1(x),\cdots,f_n(x)\} \quad 4\cdot1(再掲)$$

$$g(x)=\{g_h(x),g_d(x),g_1(x),\cdots,g_n(x),g_{n+1}(x),\cdots,g_{n+m}(x)\} \quad 4\cdot26$$

超関数g(x)については式4･27、式4･28のm個の条件があるのに、超関数f(x)については式4･29、式4･30のm個の条件が無いことを、式4･1と式4･26は意味している。

$$g_{n+1}(x)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^nG(t)dt \quad 4\cdot27$$

・・・・・・・・・・・・・・

$$g_{n+m}(x)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n+m-1}G(t)dt \quad 4\cdot28$$

$$f_{n+1}(x)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^nF(t)dt \quad 4\cdot29$$

・・・・・・・・・・・・・・

$$f_{n+m}(x)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n+m-1}F(t)dt \quad 4\cdot30$$

式4･31～式4･34に示すn+2個の成分が等しいとき、超関数f(x)と超関数g(x)の関係について、2つの考え方がある。

$$f_h(x)=g_h(x) \quad 4\cdot31$$

$$f_d(x)=g_d(x) \quad 4\cdot32$$

$$f_1(x)=g_1(x) \quad 4\cdot33$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$f_n(x)=g_n(x) \quad 4\cdot34$$

[任意値推認]

　第1の考え方は任意値推認の判断である。式4･26の成分$g_{n+1}(x)$、・・・、$g_{n+m}(x)$が任意の離散関数であるとき、超関数f(x)と超関数g(x)が等しいと考える。超関数g(x)の方が超関数f(x)よりも式4･27、式4･28のm個の条件が多い。超関数f(x)と超関数g(x)が等しいとすれば、m個の多い条件式は実質的には条件でないから、m個の成分$g_{n+1}(x)$・・・,$g_{n+m}(x)$が任意の値である。原点に置かれた大きさ1の集中力$\lambda(x)$とディラック関数$\delta(x)$の比較のときは、任意値推認(63頁参照)の断判がふさわしい。

[零値推認]

　第2の考え方は零値推認の判断である。式4･26の成分$g_{n+1}(x)$、・・・、$g_{n+m}(x)$が関数値0の定数関数であるとき、超関数f(x)と超関数g(x)が等しいと考える。超関数g(x)に比べて超関数f(x)は式4･29、式4･30のm個の成分が無い。「無い」と「数値0」が同義に用いられる場合もあるので、成分

が無いと言うことは成分$f_{n+1}(x)$、・・・、$f_{n+m}(x)$の関数値が0と考えることもできる。超関数$f(x)$と超関数$g(x)$が等しいとすれば、成分$g_{n+1}(x)$、・・・、$g_{n+m}(x)$も0である。式2・54の関数$f(x)$をそのままで成分無限個型の超関数と見なすときは、零値推認の判断(64頁参照)がふさわしい。

[選択]

成分n+2個型の超関数$f(x)$と成分n+m+2個型の超関数$g(x)$の関係を考えるときは、任意値推認と零値推認の2つの考え方のいずれを採用するか明示して議論すべきである。超関数を用いて表そうとする現象や理論に応じて、2つの考え方のうちの1つを選ぶことになる。

(4)　超関数の演算規則

近似関数は微分可能関数であり、横移動、定数倍、和、反転、積、微分、積分の演算が定義されている。近似関数に対して演算を行い、得られた関数を式4・5～式4・8の$F(x)$に代入して超関数の成分を求め、擬値表示または配列表示によって超関数を表示する。汎関数型の超関数においては、特異点において関数値が定義されないので、独立変数xの各点における演算は考えない。成分表示型の超関数においては、特異点においても成分表示された関数値が定義されるので、独立変数xの各点において演算が定義される。

(5)　横移動

2つの近似関数$F(x)$と$J(x)$と定数aについて式4・35が成り立つとき、左連続成分と段差成分について式4・36、式4・37が成り立つ。

$$J(x)=F(x-a) \qquad 4\cdot 35$$

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} J(x-\rho)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F(x-a-\rho)=f_h(x-a) \qquad 4\cdot 36$$

$$j_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{J(x+\rho)-J(x-\rho)\}=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x-a+\rho)-F(x-a-\rho)\}$$

$$=f_d(x-a) \qquad 4\cdot 37$$

第n次成分は式4・38のように計算される。

$$j_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}J(t)\,dt=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F(t-a)\,dt \qquad 4\cdot 38$$

式4・39、式4・40の変数変換を行うと表4=3のように積分区間が対応し、式4・41が成り立つ。

$$t-a=u \qquad 4\cdot 39$$

$$dt=du \qquad 4\cdot 40$$

表4=3　積分区間の対応

t	$x-\rho \rightarrow x+\rho$
u	$x-a-\rho \rightarrow x-a+\rho$

$$j_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-a-\rho}^{x-a+\rho}\{u-(x-a)\}^{n-1}F(u)\,du=f_n(x-a) \qquad 4\cdot 41$$

式4・41でn=1とすれば式4・42が得られる。

$$j_1(x)=f_1(x-a) \qquad 4\cdot 42$$

式4・36、式4・37、式4・42、式4・41を式4・43または式4・44に代入すれば超関数$j(x)$が得られ、横移動が定義される。

$$j(x)=j_h(x)+j_d(x)+j_1(x)+\cdots+j_n(x)\ {}^{n}+\cdots \qquad 4\cdot 43$$

$$j(x)=\{j_h(x),\ j_d(x),\ j_1(x),\ \cdots,\ j_n(x),\ \cdots\} \qquad 4\cdot 44$$

近似関数$J(x)$が式4・35で定義されるとき、超関数$j(x)$についても式4・35と同型の式4・45と書くことにする。式4・36、式4・37、式4・42、式4・41が式4・35と同型である。

$$J(x)=F(x-a) \qquad 4\cdot 35\text{(再掲)}$$

$$j_h(x)=f_h(x-a) \qquad 4\cdot 36\text{(再掲)}$$

$$j_d(x)=f_d(x-a) \qquad 4\cdot 37\text{(再掲)}$$

$$j_1(x)=f_1(x-a) \qquad 4\cdot 42\text{(再掲)}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j_n(x)=f_n(x-a) \qquad 4\cdot 41\text{(再掲)}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j(x)=f(x-a) \qquad 4\cdot 45$$

超関数の横移動については超関数の各成分の横移動を計算する。

(6)　超関数の定数倍と和

[定数倍]

2つの近似関数$F(x)$と$J(x)$と定数cについて式4・46が成り立つとき、成分について式4・47～式4・49が成り立つ。

$$J(x)=c\cdot F(x) \qquad 4\cdot 46$$

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} J(x-\rho)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} c\cdot F(x-\rho)=c\cdot\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F(x-\rho)$$

$$=c\cdot f_h(x) \qquad 4\cdot 47$$

$$j_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{J(x+\rho)-J(x-\rho)\}=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{c\cdot F(x+\rho)-c\cdot F(x-\rho)\}$$

$$=c\cdot\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}=c\cdot f_d(x) \qquad 4\cdot 48$$

$$j_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}J(t)\,dt=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}c\cdot F(t)\,dt$$

$$=c\cdot\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F(t)\,dt=c\cdot f_n(x) \qquad 4\cdot 49$$

式4･49でn＝1とすれば式4･50が得られる。

$$j_1(x)=c\cdot f_1(x) \qquad 4\cdot 50$$

式4･47、式4･48、式4･50、式4･49を式4･43または式4･44に代入すれば超関数j(x)が得られ、定数倍が定義される。

$$j(x)=j_h(x)+j_d(x)\uparrow\!\!\urcorner+j_1(x)\uparrow\!\!\bullet\!\!\to+\cdots+j_n(x)\uparrow\!\!\bullet\!\!\to^{n}+\cdots \qquad 4\cdot 43(再掲)$$

$$j(x)=\{j_h(x),j_d(x),j_1(x),\cdots,j_n(x),\cdots\} \qquad 4\cdot 44(再掲)$$

近似関数J(x)が式4･46で定義されるとき、超関数j(x)についても式4･46と同型の式4･51と書くことにする。式4･47、式4･48、式4･50、式4･49が式4･46と同型である。

$$J(x)=c\cdot F(x) \qquad 4\cdot 46(再掲)$$

$$j_h(x)=c\cdot f_h(x) \qquad 4\cdot 47(再掲)$$

$$j_d(x)=c\cdot f_d(x) \qquad 4\cdot 48(再掲)$$

$$j_1(x)=c\cdot f_1(x) \qquad 4\cdot 50(再掲)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j_n(x)=c\cdot f_n(x) \qquad 4\cdot 49(再掲)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j(x)=c\cdot f(x) \qquad 4\cdot 51$$

超関数の定数倍については超関数の各成分の定数倍を計算する。

［和］

3つの近似関数F(x)、G(x)、J(x)について式4･52が成り立つとき、成分

について式4･53～式4･55が成り立つ。

$$J(x)=F(x)+G(x) \qquad 4\cdot 52$$

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} J(x-\rho)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x-\rho)+G(x-\rho)\}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F(x-\rho)+\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} G(x-\rho)=f_h(x)+g_h(x) \qquad 4\cdot 53$$

$$j_d(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{J(x+\rho)-J(x-\rho)\}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[\{F(x+\rho)+G(x+\rho)\}-\{F(x-\rho)+G(x-\rho)\}]$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}+\{G(x+\rho)-G(x-\rho)\}]$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}+\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{G(x+\rho)-G(x-\rho)\}$$

$$=f_d(x)+g_d(x) \qquad 4\cdot 54$$

$$j_n(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}J(t)\,dt$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}\{F(t)+G(x)\}\,dt$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F(t)\,dt+\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}G(x)\}\,dt$$

$$=f_n(x)+g_n(x) \qquad 4\cdot 55$$

式4･55でn＝1とすれば式4･56が得られる。

$$j_1(x)=f_1(x)+g_1(x) \qquad 4\cdot 56$$

式4･53、式4･54、式4･56、式4･55を式4･43または式4･44に代入すれば超関数j(x)が得られ、和が定義される。

$$j(x)=j_h(x)+j_d(x)\uparrow\!\!\urcorner+j_1(x)\uparrow\!\!\bullet\!\!\to+\cdots+j_n(x)\uparrow\!\!\bullet\!\!\to^{n}+\cdots \qquad 4\cdot 43(再掲)$$

$$j(x)=\{j_h(x),j_d(x),j_1(x),\cdots,j_n(x),\cdots\} \qquad 4\cdot 44(再掲)$$

近似関数J(x)が式4･52で定義されるとき、超関数j(x)についても式4･52と同型の式4･57と書くことにする。式4･53、式4･54、式4･56、式4･55が式4･52と同型である。

$$J(x)=F(x)+G(x) \qquad 4\cdot 52(再掲)$$

$$j_h(x)=f_h(x)+g_h(x) \qquad 4\cdot 53(再掲)$$

$$j_d(x)=f_d(x)+g_d(x) \qquad 4\cdot 54(再掲)$$

$$j_1(x)=f_1(x)+g_1(x) \qquad 4\cdot 56(再掲)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$j_n(x)=f_n(x)+g_n(x)$　　　　4·55(再掲)

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$j(x)=f(x)+g(x)$　　　　4·57

超関数の和については超関数の各成分の和を計算する。

[差]

超関数g(x)の-1倍と超関数f(x)の和を計算すると差f(x)-g(x)が得られる。

[縦移動]

式4·52で関数G(x)を関数値aの定数関数とすれば、式4·58が得られる。

$J(x)=F(x)+a$　　　　4·58

式4·58により縦移動を表現することもできるが、式4·52の和の定義で表示されるので、式4·35で定義される横移動と異なって、縦移動について特段の説明をしないことにする。

(7)　反転

[縦軸に関する反転]

2つの近似関数F(x)とJ(x)について式4·59が成り立つとき、左連続成分と段差成分について式4·60、式4·61が成り立つ。

$J(x)=F(-x)$　　　　4·59

$$\begin{aligned} j_h(x)&=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}J(x-\rho)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}F\{-(x-\rho)\}=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}F(-x+\rho)\\ &=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\{F(-x+\rho)-F(-x-\rho)+F(-x-\rho)\}\\ &=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}[\{F(-x+\rho)-F(-x-\rho)\}+F(-x-\rho)]\\ &=f_d(-x)+f_h(-x) \qquad 4\cdot60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_d(x)&=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\{J(x+\rho)-J(x-\rho)\}=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}[F\{-(x+\rho)\}-F\{-(x-\rho)\}\\ &=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\{F(-x-\rho)-F(-x+\rho)\}=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}[-\{F(-x+\rho)-F(-x-\rho)\}]\\ &=-f_d(-x) \qquad 4\cdot61 \end{aligned}$$

第n次成分は式4·62のように計算される。

$$j_n(x)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}J(t)\,dt \qquad 4\cdot62$$

式4·63、式4·64の変数変換を行うと表4=4のように積分区間が対応し、式4·62は式4·65に変形される。

$t=-u$　　　　4·63

$dt=-du$　　　　4·64

表4=4　積分区間の対応

t	$x-\rho$ → $x+\rho$
u	$-x+\rho$ → $-x-\rho$

$$\begin{aligned} j_n(x)&=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F(-t)\,dt=-\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-x+\rho}^{-x-\rho}(-u-x)^{n-1}F(u)\,du\\ &=(-1)^{n}\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-x+\rho}^{-x-\rho}(u+x)^{n-1}F(u)\,du\\ &=(-1)^{n-1}\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-x-\rho}^{-x+\rho}\{u-(-x)\}^{n-1}F(u)\,du=(-1)^{n-1}f_n(-x) \qquad 4\cdot65 \end{aligned}$$

nが奇数の場合、式4·65は式4·66に書き換えられる。

$j_n(x)=f_n(-x)$　　(n=1、3、5、・・・)　　　　4·66

nが偶数の場合、式4·65は式4·67に書き換えられる。

$j_n(x)=-f_n(-x)$　　(n=2、4、6、・・・)　　　　4·67

式4·60、式4·61、式4·66、式4·67を式4·43または式4·44に代入すれば超関数j(x)が得られ、反転が定義される。

$j(x)=j_h(x)+j_d(x)+j_1(x)+\cdots+j_n(x)\,{}^{n}+\cdots$　　　　4·43(再掲)

$j(x)=\{j_h(x),j_d(x),j_1(x),\cdots,j_n(x),\cdots\}$　　　　4·44(再掲)

近似関数J(x)が式4·59で定義されるとき、超関数j(x)についても式4·59と同型の式4·68と書くことにする。

$J(x)=F(-x)$　　　　4·59(再掲)

$j_h(x)=f_d(-x)+f_h(-x)$　　　　4·60(再掲)

$j_d(x)=-f_d(-x)$　　　　4·61(再掲)

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$j_n(x)=f_n(-x)$　　(n=1、3、5、・・・)　　　　4·66(再掲)

$j_n(x)=-f_n(-x)$　　(n=2、4、6、・・・)　　　　4·67(再掲)

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$j(x)=f(-x)$　　　　4·68

式4·60、式4·61、式4·66、式4·67のうちで、式4·66だけが式4·59と同型である。式4·59によって縦軸に関する反転が定義される。

[横軸に関する反転]

縦軸に関する反転と同じように式4･69によって横軸に関する反転が定義されるが、式4･69は数値-1の定数倍であり、式4･46で定義されるから、横軸に関する反転について特段の説明をしないことにする。

$$J(x)=-F(x) \qquad 4\cdot 69$$

(8)　超関数と微分可能関数の積

［予想］

3つの近似関数F(x)、G(x)、J(x)について式4･70が成り立つとき、成分について式4･71～式4･73を用いて計算することができれば、成分を式4･43または式4･44に代入して、2つの超関数f(x)、g(x)の積を定義することができる。

$$J(x)=F(x)\cdot G(x) \qquad 4\cdot 70$$

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} J(x-\rho)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x-\rho)\cdot G(x-\rho)\} \qquad 4\cdot 71$$

$$\begin{aligned} j_d(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{J(x+\rho)-J(x-\rho)\}\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[\{F(x+\rho)\cdot G(x+\rho)\}-\{F(x-\rho)\cdot G(x-\rho)\}] \qquad 4\cdot 72\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_n(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}J(t)dt\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}\{F(t)\cdot G(t)\}dt \qquad 4\cdot 73\end{aligned}$$

しかし、式4･71～式4･73の極限は一般的には収束しないので、2つの超関数f(x)、g(x)の積を定義することはできない。

［テイラー展開］

式4･73を見ると、2つの近似関数F(t)、G(t)の片方が式4･74の形であれば、k=1､2､3､・・・に対して式4･73が収束しそうだと予想される。

$$G(t)=(t-x)^k \qquad 4\cdot 74$$

点t=xのまわりでテイラー展開可能な任意の関数$\phi(t)$は式4･75で表される。

$$\begin{aligned}\phi(t)&=\phi(x)+\frac{\phi'(x)}{1!}(t-x)+\frac{\phi''(x)}{2!}(t-x)^2+\cdots+\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k+\cdots\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k \qquad 4\cdot 75\end{aligned}$$

k=0については、$\phi^{(0)}(x)=\phi(x)$、0!=1としている。式4･76のように近似関数G(x)の代わりに式4･75の関数$\phi(x)$を用いると、式4･73は式4･77のように計算される。

$$J(x)=\phi(x)\cdot F(x) \qquad 4\cdot 76$$

$$\begin{aligned} j_n(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}\{\phi(t)\cdot F(t)\}dt\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k\cdot F(t)\}dt\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n+k-1}\cdot F(t)dt\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}f_{n+k}(x) \qquad 4\cdot 77\end{aligned}$$

式4･77でn=1とすれば式4･78が得られる。

$$j_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}f_{1+k}(x) \qquad 4\cdot 78$$

式4･71について式4･79のように計算することができる。

$$\begin{aligned} j_h(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{\phi(x-\rho)\cdot F(x-\rho)\}=\lim_{\rho\to 0}\phi(x-\rho)\cdot\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}F(x-\rho)\\ &=\phi(x)\cdot f_h(x) \qquad 4\cdot 79\end{aligned}$$

式4･72についても式4･80のように計算することができる。

$$\begin{aligned} j_d(x)&=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[\{\phi(x+\rho)\cdot F(x+\rho)\}-\{\phi(x-\rho)\cdot F(x-\rho)]\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[\{\phi(x+\rho)\cdot F(x+\rho)\}-\{\phi(x+\rho)\cdot F(x-\rho)\}\\ &\qquad +\{\phi(x+\rho)\cdot F(x-\rho)\}-\{\phi(x-\rho)\cdot F(x-\rho)\}]\\ &=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}[\phi(x+\rho)\cdot\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}+\{\phi(x+\rho)-\phi(x-\rho)\}\cdot F(x-\rho)]\\ &=\lim_{\rho\to 0}\phi(x+\rho)\cdot\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}\\ &\qquad +\lim_{\rho\to 0}\{\phi(x+\rho)-\phi(x-\rho)\}\cdot\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}F(x-\rho)]\\ &=\phi(x)\cdot f_d(x)+\{\phi(x)-\phi(x)\}\cdot f_h(x)=\phi(x)\cdot f_d(x) \qquad 4\cdot 80\end{aligned}$$

式4･79、式4･80、式4･78、式4･77を式4･43または式4･44に代入すれば超関数j(x)が得られ、積が定義される。

$$j(x)=j_h(x)+j_d(x)\;+j_1(x)\;+\cdot\cdot\cdot+j_n(x)\;{}^{n}+\cdot\cdot\cdot\qquad 4\cdot43(再掲)$$

$$j(x)=\{j_h(x),\,j_d(x),\,j_1(x),\,\cdot\cdot\cdot,\,j_n(x),\,\cdot\cdot\cdot\}\qquad 4\cdot44(再掲)$$

近似関数J(x)が式4･76で定義されるとき、超関数j(x)についても式4･76と同型の式4･81と書くことにする。式4･79、式4･80は式4･76と同型であるが、式4･78、式4･77は式4･76と同型でないので注意が必要である。

$$J(x)=\phi(x)\cdot F(x)\qquad 4\cdot76(再掲)$$

$$j_h(x)=\phi(x)\cdot f_h(x)\qquad 4\cdot79(再掲)$$

$$j_d(x)=\phi(x)\cdot f_d(x)\qquad 4\cdot80(再掲)$$

$$j_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}f_{1+k}(x)\qquad 4\cdot78(再掲)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}f_{n+k}(x)\qquad 4\cdot77(再掲)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j(x)=\phi(x)\cdot f(x)\qquad 4\cdot81$$

[注意]

式4･82の関数$\phi(x)$を考えると、式4･79、式4･80、式4･78、式4･77に代入して、式4･83のように計算される。

$$\phi(x)=(x-a)\qquad 4\cdot82$$

$$j(a)=\{0,0,f_2(a),f_3(a),f_4(a),\cdot\cdot\cdot\}\qquad 4\cdot83$$

数値$\phi(a)$は0であるが、数値$\phi'(a)$が1であるから第1次成分以後の成分は0にならない。式4･81に直接にx＝aを代入して、式4･84のように計算すると結果が式4･83と異なる。

$$\begin{aligned}j(a)&=\phi(a)\cdot f(a)=(a-a)\cdot f(a)=0\cdot f(a)\\&=0\cdot\{f_1(a),f_2(a),f_3(a),f_4(a),\cdot\cdot\cdot\}\\&=(0,0,0,0,0,0,\cdot\cdot\cdot)\qquad 4\cdot84\end{aligned}$$

数値$\phi(a)$は関数$\phi(x)$にx＝aを代入した結果であり、元々の数値である式4･51のcとは異なるので、式4･84のように計算するのは誤りである。

(9)　超関数の導関数

[微分可能性]

同等な多くの近似関数の中に微分可能なものがあるとき、微分可能な近似関数F(x)を選ぶことができる。近似関数F(x)の性質を超関数f(x)が引き継ぐから、超関数f(x)が微分可能であると言う。式4･85、式4･86の超関数f(x)の左連続成分$f_h(x)$は、点x＝0において折れ曲がっており、微分不能であるが、式4･87、式4･88、式4･89の近似関数F(x)が微分可能であるから、超関数f(x)も微分可能であると考える。

$$f(x)=(0,0,0,0,0,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\qquad(-\infty<x\leqq0)\qquad 4\cdot85$$

$$f(x)=(x,0,0,0,0,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\qquad(0\leqq x<+\infty)\qquad 4\cdot86$$

$$F(x)=0\qquad(-\infty<x\leqq-\varepsilon)\qquad 4\cdot87$$

$$F(x)=\frac{1}{32\varepsilon^5}x^6-\frac{5}{32\varepsilon^3}x^4+\frac{15}{32\varepsilon}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{32}\varepsilon\qquad(-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon)\qquad 4\cdot88$$

$$F(x)=x\qquad(+\varepsilon\leqq x<+\infty)\qquad 4\cdot89$$

超関数f(x)が微分可能であっても、成分関数は微分不能な点がある。左連続成分$f_h(x)$以外の成分関数は、関数値が0でない点において微分不能である。左連続成分$f_h(x)$は段差成分$f_d(x)$の関数値が0でない点において不連続であり、微分不能である。段差成分$f_d(x)$の関数値が0の点において、左連続成分$f_h(x)$は連続であるが、式4･85、式4･86の点x＝0のように微分不能な場合もある。左連続成分$f_h(x)$の微分不能な点は、離散的にしか存在しない。

[成分表示]

2つの近似関数F(x)、J(x)について式4･90が成り立つとき、左連続成分、段差成分、第n次成分について式4･91～式4･93が成り立つ。

$$J(x)=F'(x)\qquad 4\cdot90$$

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}J(x-\rho)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}F'(x-\rho)=\lim_{\rho\to0}f_h'(x-\rho)\qquad 4\cdot91$$

$$\begin{aligned}j_d(x)&=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\{J(x+\rho)-J(x-\rho)\}=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\{F'(x+\rho)-F'(x-\rho)\}\\&=\lim_{\rho\to0}\{f_h'(x+\rho)-f_h'(x-\rho)\}\qquad 4\cdot92\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}j_1(x)&=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}J(t)\,dt=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}F'(t)\,dt\\&=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}[F(t)]_{x-\rho}^{x+\rho}=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\{F(x+\rho)-F(x-\rho)\}=f_d(x)\qquad 4\cdot93\end{aligned}$$

n＝2、3、4、・・・に対して関数$(t-x)^{n-1}F(t)$をtについて微分すると、式4・94が得られる。

$$\{(t-x)^{n-1}F(t)\}' = (n-1)(t-x)^{n-2}F(t)+(t-x)^{n-1}F'(t)$$

$$(t-x)^{n-1}F'(t) = \{(t-x)^{n-1}F(t)\}'-(n-1)(t-x)^{n-2}F(t) \qquad 4・94$$

式4・94を区間$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$で積分すると式4・95が得られる。

$$\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F'(t)\,dt = [(t-x)^{n-1}F(t)]_{x-\rho}^{x+\rho} - \int_{x-\rho}^{x+\rho}(n-1)(t-x)^{n-2}F(t)\,dt$$

$$=[\rho^{n-1}F(x+\rho)-(-\rho)^{n-1}F(x-\rho)]-(n-1)\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-2}F(t)\,dt \qquad 4・95$$

$\varepsilon\to0$、$\rho\to0$のとき式4・95の最後辺の第１項は0に収束するから式4・96が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F'(t)\,dt=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\{-(n-1)\}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-2}F(t)\,dt \qquad 4・96$$

式4・96を用いると式4・97が成り立つ。

$$j_n(x)=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}J(t)\,dt=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-1}F'(t)\,dt$$

$$=\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\{-(n-1)\}\int_{x-\rho}^{x+\rho}(t-x)^{n-2}F(t)\,dt$$

$$=-(n-1)f_{n-1}(x) \qquad 4・97$$

式4・97でn＝2とすれば式4・98が得られる。

$$j_2(x)=-f_1(x) \qquad 4・98$$

式4・91、式4・92、式4・93、式4・98、式4・97を式4・43または式4・44に代入すれば超関数j(x)が得られ、導関数が定義される。

$$j(x)=j_h(x)+j_d(x)+j_1(x)+\cdots+j_n(x)^n+\cdots \qquad 4・43(再掲)$$

$$j(x)=\{j_h(x),\ j_d(x),\ j_1(x),\ \cdots,\ j_n(x),\ \cdots\} \qquad 4・44(再掲)$$

近似関数J(x)が式4・90で定義されるとき、超関数j(x)についても式4・90と同型の式4・99と書くことにする。

$$J(x)=F'(x) \qquad 4・90(再掲)$$

$$j_h(x)=\lim_{\rho\to0}f_h'(x-\rho) \qquad 4・91(再掲)$$

$$j_d(x)=\lim_{\rho\to0}\{f_h'(x+\rho)-f_h'(x-\rho)\} \qquad 4・92(再掲)$$

$$j_1(x)=f_d(x) \qquad 4・93(再掲)$$

$$j_2(x)=-f_1(x) \qquad 4・98(再掲)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j_n(x)=-(n-1)f_{n-1}(x) \qquad 4・97(再掲)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j(x)=f'(x) \qquad 4・99$$

いずれの成分についても微分不能な点は離散的にしか存在しないが、関数値が0でない点が微分可能な成分は左連続成分$f_h(x)$だけであり、導関数$f_h'(x)$を式4・91、式4・92の計算に用いる意味がある。左連続成分以外の成分$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・の0でない関数値を持つ点は微分不能であり、導関数$f_d'(x)$、$f_1'(x)$、$f_2'(x)$、・・・は存在しない。成分$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・の関数値0の点は微分可能ではあるが、導関数$f_d'(x)$、$f_1'(x)$、$f_2'(x)$、・・・は関数値が0であり、式4・91、式4・92、式4・93、式4・98、式4・97の計算に用いる意味がない。段差成分$f_d(x)$が第1次成分$j_1(x)$に移動する。第2次以上の成分については、第(n-1)次成分$f_{n-1}(x)$を-(n-1)倍して第n次成分$j_n(x)$に移動する。

[成分数の増加]

微分演算が超関数の成分数におよぼす影響について注意が必要である。成分数が有限個の場合には、成分n+2個型の関数f(x)の最高次の第n次成分が式4・99の導関数j(x)の第n+1次成分に移動するから、成分数が1個増え、成分n+3個型の導関数j(x)が得られる。成分数が無限個の場合には、関数f(x)の第n次成分が導関数j(x)の第n+1次成分に移動しても、成分数は無限個で変わらない。

(10) 超関数の積分

[独立変数xの区間における演算]

積分は下端から上端までの区間における演算である。成分表示型の超関数の独立変数xは近似関数の区間$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$に対応する。近似関数は微分可能関数であり、積分の演算が定義されている。積分の下端と上端の両方について区間$x-\rho \leqq t \leqq x+\rho$と対応させて考えることはできない。

成分表示型の超関数の積分を考えるとき、下端と上端を同格と考えないことにし、下端は極限$x=a-0$または$x=a+0$とし、上端は点$x=b$とし、近似関数の区間$b-\rho \leqq x \leqq b+\rho$と対応させる。下端を$-\infty$とする広義積分が収束すれば、下端を$-\infty$とすることもできる。

［非同格積分］

近似関数$F(x)$を用いて式4･100で計算される関数$J(x)$を近似関数として、式4･101の非同格積分$j(b)$を定義する。

$$J(x)=\int_{a-\rho}^{x} F(t)\,dt \qquad 4\cdot 100$$

$$j(b)=\int_{a-0}^{b} f(x)\,dx \qquad 4\cdot 101$$

式4･101は、超関数$f(x)$の下端$x=a-0$、上端$x=b$の非同格積分$j(b)$である。成分について、式1･1～式1･4で計算すれば、式4･102～式4･105が成り立つ。

$$j_h(b)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\rho}^{b-\rho} F(x)\,dx \qquad 4\cdot 102$$

$$j_d(b)=f_1(b) \qquad 4\cdot 103$$

$$j_1(b)=-f_2(b) \qquad 4\cdot 104$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j_n(b)=-\frac{1}{n}f_{n+1}(b) \qquad 4\cdot 105$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

式4･103について下記のように計算される。

$$j_d(b)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\{J(b+\rho)-J(b-\rho)\}=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{a-\rho}^{b+\rho}F(x)\,dx-\int_{a-\rho}^{b-\rho}F(x)\,dx\right\}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b-\rho}^{b+\rho}F(x)\,dx=f_1(b) \qquad 4\cdot 103$$

式4･105については下記のように計算される。式4･100の両辺を微分すると式4･106が得られる。

$$J'(x)=F(x) \qquad 4\cdot 106$$

関数$(x-b)^n J(x)$を微分し、式4･106を代入すると式4･107が得られる。

$$\{(x-b)^n J(x)\}'=n(x-b)^{n-1}J(x)+(x-b)^n J'(x)$$

$$n(x-b)^{n-1}J(x)=\{(x-b)^n J(x)\}'-(x-b)^n F(x) \qquad 4\cdot 107$$

式4･107を区間$b-\rho \leqq x \leqq b+\rho$で積分すると式4･108が得られる。

$$\int_{b-\rho}^{b+\rho} n(x-b)^{n-1}J(x)\,dx=\left[(x-b)^n J(x)\right]_{b-\rho}^{b+\rho}-\int_{b-\rho}^{b+\rho}(x-b)^n F(x)\,dx$$

$$\int_{b-\rho}^{b+\rho}(x-b)^{n-1}J(x)\,dx=\frac{1}{n}\{\rho^n J(b+\rho)-(-\rho)^n J(b-\rho)\}-\frac{1}{n}\int_{b-\rho}^{b+\rho}(x-b)^n F(x)\,dx \qquad 4\cdot 108$$

式4･108を代入して第n次成分$j_n(b)$は

$$j_n(b)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b-\rho}^{b+\rho}(x-b)^{n-1}J(x)\,dx$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{n}\{\rho^n J(b+\rho)-(-\rho)^n J(b-\rho)\}-\frac{1}{n}\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b-\rho}^{b+\rho}(x-b)^n F(x)\,dx$$

$$=0-\frac{1}{n}f_{n+1}(b)=-\frac{1}{n}f_{n+1}(b) \qquad 4\cdot 105$$

左連続成分$j_h(x)$は超関数$f(x)$の成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・で表わすことができない。左連続成分$j_h(x)$以外の成分$j_d(b)$、$j_1(b)$、$j_2(b)$、・・・は下端$x=a-0$に関係なく数値が定まるから、数値aを変動させても、下端$x=a+0$としても、下端$x=-\infty$としても同じである。式4･102～式4･105を式4･109に代入すれば、非同格積分$j(b)$が関数配列で表示される。

$$j(b)=\{j_h(b), j_d(b), j_1(b), j_2(b),\ \cdots\} \qquad 4\cdot 109$$

式4･101と式4･109を組み合わせると式4･110が得られる。

$$\int_{a-0}^{b} f(x)\,dx=\{j_h(b), j_d(b), j_1(b), j_2(b),\ \cdots\} \qquad 4\cdot 110$$

［同格積分］

式4･110の上端bに極限b-0またはb+0を代入すると、下端と上端の両方ともに極限で、同格になる。式4･110のbに極限b-0を代入し、式4･22を用いれば式4･111が求まる。上端を$+\infty$とする広義積分が収束すれば、上端を$+\infty$とすることもできる。

$$\int_{a-0}^{b-0} f(x)\,dx = \{j_h(b), 0, 0, 0, \cdot\cdot\cdot\} \tag{4·111}$$

式4・110のbに極限b+0を代入し、式4・23を用いれば式4・112が求まる。

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x)\,dx = \{j_h(b)+j_d(b), 0, 0, 0, \cdot\cdot\cdot\} \tag{4·112}$$

下端と上端が同格であれば、普通の関数についての積分と同じように、
下端と上端を入れ替えることができ、式4・113が成り立つ。

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x)\,dx = -\int_{b+0}^{a-0} f(x)\,dx \tag{4·113}$$

[定積分]

式4・111を関数擬値で表示すれば、左連続成分以外のすべての成分が0であるから、式4・114が求まり、単一の数値のように見える。

$$\int_{a-0}^{b-0} f(x)\,dx = j_h(b) \tag{4·114}$$

式4・112を関数擬値で表示すれば、左連続成分以外のすべての成分が0であるから、式4・115が求まり、単一の数値のように見える。

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x)\,dx = j_h(b)+j_d(b) \tag{4·115}$$

式4・114や式4・115の表現は、関数擬値で表示された同格積分であり、単一の数値のように見える。関数擬値で表示された同格積分を定積分と呼ぶ。式4・116の左辺が定積分であれば、式4・102と式4・114を組み合わせて、式4・116のように書くことができる。

$$\int_{a-0}^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\rho}^{b-\rho} F(x)\,dx \tag{4·116}$$

[積分の分割]

同格な積分については、普通の関数についての積分と同じように、式4・117のように、積分区間を分割することができる。

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x)\,dx = \int_{a-0}^{c-0} f(x)\,dx + \int_{c-0}^{b+0} f(x)\,dx \tag{4·117}$$

同格でない積分についても、式4・118のように、積分区間を分割することができる。

$$\int_{a-0}^{b} f(x)\,dx = \int_{a-0}^{c-0} f(x)\,dx + \int_{c-0}^{b} f(x)\,dx \tag{4·118}$$

式4・118の右辺第1項は同格積分である。各辺に2個以上の非同格積分を含むことはできない。

[不定積分]

式4・101の非同格積分の上端bを変動させ、独立変数xとすると、式4・119が得られる。

$$j(x) = \int_{a-0}^{x} f(t)\,dt \tag{4·119}$$

式4・119のように上端が独立変数である非同格積分を不定積分と言う。式4・119は下端がa-0の不定積分である。式4・102～式4・105の上端bに変数xを代入すると、成分について式4・120～式4・123が成り立つ。

$$j_h(x) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\rho}^{x-\rho} F(t)\,dt \tag{4·120}$$

$$j_d(x) = f_1(x) \tag{4·121}$$

$$j_1(x) = -f_2(x) \tag{4·122}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$j_n(x) = -\frac{1}{n} f_{n+1}(x) \tag{4·123}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

式4・119を成分表示すると、式4・124または式4・125が得られる。

$$\int_{a-0}^{x} f(t)\,dt = \{j_h(x), j_d(x), j_1(x), j_2(x), \cdot\cdot\cdot\} \tag{4·124}$$

$$\int_{a-0}^{x} f(t)\,dt = j_h(x)+j_d(x)\;+j_1(x)\;+j_2(x)\;^{2}+\cdot\cdot\cdot \tag{4·125}$$

式4・100について式4・126が成立つから、式4・119についても式4・127が成立つ。

$$J'(x) = F(x) \tag{4·126}$$

$$j'(x) = f(x) \tag{4·127}$$

[成分数の減少]

積分演算が超関数の成分数におよぼす影響について注意が必要である。成分数が有限個の場合には、式4･1または式4･2のように成分表示されている。成分n+2個型の超関数f(x)の最高次の第n次成分が式4･123に従って、式4･119の不定積分j(x)の第n-1次成分に移動するから、成分数が1個減り、成分n-1個型の不定積分j(x)が得られる。成分数が無限個の場合には、超関数f(x)の第n次成分が不定積分j(x)の第n-1次成分に移動しても、成分数は無限個で変わらない。

[1点における積分]

式4･119に点x＝aを代入すると式4･128のように1点における非同格積分が定義できる。

$$j(a)=\int_{a-0}^{a} f(x)dx \qquad 4\cdot128$$

式4･128の成分を式4･120～式4･123で計算し、関数配列で表示すれば、式4･129が得られる。

$$\int_{a-0}^{a} f(x)dx=\{0, f_1(a), -f_2(a), \cdot\cdot\cdot -\frac{1}{n} f_{n+1}(a), \cdot\cdot\cdot\} \qquad 4\cdot129$$

式4･101に極限x＝a-0を代入すると式4･130が得られる。

$$j(a-0)=\int_{a-0}^{a-0} f(x)dx \qquad 4\cdot130$$

式4･111、式4･120を考慮すれば、式4･131が得られる。

$$\int_{a-0}^{a-0} f(x)dx=\{0, 0, 0, 0, \cdot\cdot\cdot\} \qquad 4\cdot131$$

式4･101に極限x＝a+0を代入すると式4･132のように1点における同格積分が定義できる。

$$j(a+0)=\int_{a-0}^{a+0} f(x)dx \qquad 4\cdot132$$

式4･112、式4･120を考慮すれば、式4･133が得られる。

$$\int_{a-0}^{a+0} f(x)dx=\{f_1(a), 0, 0, 0, \cdot\cdot\cdot\} \qquad 4\cdot133$$

(11) 原始関数

[導関数の逆演算]

式4･134が成立つとき、超関数j(x)を超関数f(x)の原始関数と言う。

$$j'(x)=f(x) \qquad 4\cdot134$$

式4･134は式4･99と逆演算になっている。式4･134が成立つとき、近似関数J(x)と近似関数F(x)について式4･135が成立つ。

$$J'(x)=F(x) \qquad 4\cdot135$$

任意定数Cを用いた式4･136の関数N(x)を用いると、式4･137が成立つ。

$$N(x)=C \qquad 4\cdot136$$

$$\{J(x)+N(x)\}'=J'(x)+N'(x)=J'(x)=F(x) \qquad 4\cdot137$$

近似関数について原始関数は関数N(x)の任意性があることを、式4･137は意味している。関数N(x)を積分定数と言う。定数Cを積分定数と言っても良い。式4･138の超関数n(x)を用いると、式4･139が成立つ。

$$n(x)=(C, 0, 0, 0, \cdot\cdot\cdot) \qquad 4\cdot138$$

$$\{j(x)+n(x)\}'=j'(x)=f(x) \qquad 4\cdot139$$

超関数n(x)は、左連続成分$n_h(x)$が定数Cで、他の成分が全て0である。超関数について原始関数は超関数n(x)の任意性があることを、式4･139は意味している。超関数n(x)を積分定数と言う。

[原始関数と不定積分]

式4･127が成立つので、式4･119の不定積分j(x)は原始関数の1つである。しかし、原始関数と不定積分は全く同じではない。原始関数と不定積分は、元々の意味が異なっている。式4･101の非同格積分の上端bを変動させ、独立変数xとして得られる式4･119のj(x)が不定積分である。導関数の逆演算の式4･134のj(x)が原始関数である。不定積分と原始関数は微妙に異なる場合がある。式4･118を用いて、不定積分を、式4･140のように分割する。

$$\int_{a-0}^{x} f(t)dt=\int_{a-0}^{c-0} f(x)dx+\int_{c-0}^{x} f(x)dx \qquad 4\cdot140$$

式4･140の右辺第1項が式4･141のように定数Cの任意性が有れば、原始関

数と不定積分が完全に一致する。

$$\int_{a-0}^{c-0} f(x)dx = n(x) = (C, 0, 0, 0, \cdots) \qquad 4\cdot141$$

しかし、超関数f(x)が式4・142のように成分が全て0の定数関数であるとき、式4・141の定数Cは0になり、任意性を持たない。

$$f(x) = (0, 0, 0, 0, \cdots) \qquad 4\cdot142$$

式4・142の超関数f(x)を対象とするとき、原始関数と不定積分は一致しない。原始関数の方が不定積分より任意性が大きい。

(12) 基本関数

[右半分整冪関数]

式4・143、式4・144の関数$\alpha_n(x)$を第n次の右半分整冪関数と呼ぶ。

$$\alpha_n(x) = 0 \qquad (x \leqq 0) \qquad (n=1、2、3、\cdots) \qquad 4\cdot143$$

$$\alpha_n(x) = x^n \qquad (0 \leqq x) \qquad (n=1、2、3、\cdots) \qquad 4\cdot144$$

式4・143と式4・144は点x＝0において連続であり、点x＝0に注目すると関数$\alpha_n(x)$はn-1回微分可能である。式4・143、式4・144は普通の連続関数であるが、擬値表示の超関数と見なすこともできる。式4・143、式4・144の超関数を配列表示すれば、式4・145、式4・146のようになる。

$$\alpha_n(x) = (0, 0, 0, 0, \cdots) \qquad (x \leqq 0) \qquad (n=1、2、3、\cdots) \qquad 4\cdot145$$

$$\alpha_n(x) = (x^n, 0, 0, 0, \cdots) \qquad (0 \leqq x) \qquad (n=1、2、3、\cdots) \qquad 4\cdot146$$

式4・145、式4・146でn＝1とした関数$\alpha_1(x)$は式4・85、式4・86の超関数
f(x)(88頁参照)と同じである。

関数$\alpha_n(x)$は添え字nを持つから、成分は式4・147に示すように、2つの添え字を持ち、関数$\alpha_n(x)$が成分ではないから注意が必要である。

$$\alpha_n(x) = (\alpha_{nh}(x), \alpha_{nd}(x), \alpha_{n1}(x), \alpha_{n2}(x), \cdots) \qquad 4\cdot147$$

右半分整冪関数$\alpha_n(x)$は微分に関して式4・148が成り立つ。

$$\alpha_n'(x) = n\cdot\alpha_{n-1}(x) \qquad (n=2、3、4、\cdots) \qquad 4\cdot148$$

式4・143、式4・144から式4・149が成り立つ。

$$\alpha_n(x) = x\cdot\alpha_{n-1}(x) \qquad (n=2、3、4、\cdots) \qquad 4\cdot149$$

[基本段差関数]

式4・143、式4・144でn＝0とすると点x＝0において不連続になるから、関数$\alpha_0(x)$を式4・150、式4・151、式4・152で表し、基本段差関数と呼ぶ。

$$\alpha_0(x) = 0 \qquad (x<0) \qquad 4\cdot150$$

$$\alpha_0(x) = \qquad (x=0) \qquad 4\cdot151$$

$$\alpha_0(x) = 1 \qquad (0<x) \qquad 4\cdot152$$

基本段差関数$\alpha_0(x)$は式3・72、式3・73、式3・74のヘビサイド関数$\eta(x)$と同じである。

[超関数$\alpha_1(x)$の導関数]

n＝1のときの式4・143、式4・144の超関数$\alpha_1(x)$について、点x＝0以外における導関数が式4・153、式4・154のように計算される。

$$\alpha_1'(x) = 0 \qquad (x<0) \qquad 4\cdot153$$

$$\alpha_1'(x) = 1 \qquad (0<x) \qquad 4\cdot154$$

点x＝0における導関数$\alpha_1'(0)$を求めるために、関数$\alpha_1(x)$の成分のうち計算に用いる成分を式4・155、式4・156、式4・157、式4・158のように書き出す。

$$\alpha_{1h}'(x) = 0 \qquad (x<0) \qquad 4\cdot155$$

$$\alpha_{1h}'(x) = 1 \qquad (0<x) \qquad 4\cdot156$$

$$\alpha_{1d}(0) = 0 \qquad 4\cdot157$$

$$\alpha_{1n}(0) = 0 \qquad 4\cdot158$$

式4・159のように関数$\alpha_1(x)$の導関数j(x)を表し、式4・91、式4・92、式4・93、式4・97を用い、成分を式4・160～式4・163のように計算する。

$$j(x) = \alpha_1'(x) \qquad 4\cdot159$$

$$j_h(0) = \lim_{\rho\to0} \alpha_{1h}'(x-\rho) = 0 \qquad 4\cdot160$$

$$j_d(0) = \lim_{\rho\to0} \{\alpha_{1h}'(x+\rho) - \alpha_{1h}'(x-\rho)\} = 1-0 = 1 \qquad 4\cdot161$$

$$j_1(0) = \alpha_{1d}(0) = 0 \qquad 4\cdot162$$

$$j_n(0) = -(n-1)\alpha_{1n-1}(0) = -(n-1)\cdot0 = 0 \qquad (n=2、3、4、\cdots) \qquad 4\cdot163$$

式4・160～式4・163を代入すると式4・164が得られる。

$$\alpha_1'(x) = \qquad (x=0) \qquad 4\cdot164$$

式4・153、式4・164、式4・154が関数$\alpha_1(x)$の導関数である。式4・153、式

4･164、式4･154の関数$\alpha_1'(x)$を式4･150、式4･151、式4･152の関数$\alpha_0(x)$と比べると式4･165が得られる。

$\alpha_1'(x)=\alpha_0(x)$　　4･165

［超関数$\alpha_0(x)$のx倍］

式4･150、式4･152から点$x\neq0$において式4･166、式4･167が成り立つ。

$x\cdot\alpha_0(x)=0$　　$(x<0)$　　4･166

$x\cdot\alpha_0(x)=x$　　$(0<x)$　　4･167

式4･168のように関数$\alpha_0(x)$のx倍の関数$j(x)$を表し、点$x=0$における関数値$j(0)$を求めるために、関数$\alpha_0(x)$の成分のうち計算に用いる成分を式4･169、式4･170、式4･171のように書き出す。

$j(x)=x\cdot\alpha_0(x)$　　4･168

$\alpha_{0h}(0)=0$　　4･169

$\alpha_{0d}(0)=1$　　4･170

$\alpha_{0n}(0)=0$　　$(n=1、2、3、\cdot\cdot\cdot)$　　4･171

式4･79、式4･80、式4･77を用い、成分を式4･172、式4･173、式4･174のように計算する。式4･174で$x'=1$、$x''=0$を用いる。

$j_h(x)=x\cdot\alpha_{0h}(x)$　　4･172

$j_d(x)=x\cdot\alpha_{0d}(x)$　　4･173

$j_n(x)=x\cdot\alpha_{0n}(x)+1\cdot\alpha_{0n+1}(x)$　　$(n=1、2、3、\cdot\cdot\cdot)$　　4･174

式4･169～式4･171を式4･172～式4･174に代入して式4･175、式4･176、式4･177が成り立つ。

$j_h(0)=0\cdot0=0$　　4･175

$j_d(0)=0\cdot1=0$　　4･176

$j_n(0)=0\cdot0+1\cdot0=0$　　$(n=1、2、3、\cdot\cdot\cdot)$　　4･177

式4･175～式4･177と式4･168から式4･178が成り立つ。

$x\cdot\alpha_0(x)=0$　　$(x=0)$　　4･178

式4･166、式4･178、式4･167から式4･179が成り立つ。

$x\cdot\alpha_0(x)=\alpha_1(x)$　　4･179

［基本集中関数］

式4･180、式4･181の$\beta_n(x)$を第n次の基本集中関数と呼ぶ。

$\beta_n(x)=0$　　$(x\neq0)$　　$(n=1、2、3、\cdot\cdot\cdot)$　　4･180

$\beta_n(x)=\uparrow\!\!\bullet\!\!\rightarrow^{n}$　　$(x=0)$　　$(n=1、2、3、\cdot\cdot\cdot)$　　4･181

式4･180、式4･181は擬値表示である。$n=1$のときの式4･180、式4･181の$\beta_1(x)$はディラック関数$\delta(x)$と同じである。

［超関数$\alpha_0(x)$の導関数］

式4･150、式4･151、式4･152の超関数$\alpha_0(x)$について、点$x=0$以外における導関数が式4･182のように計算される。

$\alpha_0'(x)=0$　　$(x\neq0)$　　4･182

点$x=0$における導関数$\alpha_0'(0)$を求めるために、関数$\alpha_0(x)$の成分のうち計算に用いる成分を式4･183、式4･170、式4･171のように書き出す。

$\alpha_{0h}'(x)=0$　　$(x\neq0)$　　4･183

$\alpha_{0d}(0)=1$　　4･170（再掲）

$\alpha_{0n}(0)=0$　　$(n=1、2、3、\cdot\cdot\cdot)$　　4･171（再掲）

式4･184のように関数$\alpha_0(x)$の導関数$j(x)$を表し、式4･91、式4･92、式4･93、式4･97を用い、成分を式4･185～式4･188のように計算する。

$j(x)=\alpha_0'(x)$　　4･184

$j_h(0)=\lim_{\rho\to0}\alpha_{0h}'(-\rho)=0$　　4･185

$j_d(0)=\lim_{\rho\to0}\{\alpha_{0h}'(+\rho)-\alpha_{0h}'(-\rho)\}=0-0=0$　　4･186

$j_1(0)=\alpha_{0d}(0)=1$　　4･187

$j_n(0)=-(n-1)\alpha_{0n-1}(0)=-(n-1)\cdot0=0$　　$(n=2、3、4、\cdot\cdot\cdot)$　　4･188

式4･185～式4･188を代入すると式4･189が得られる。

$\alpha_0'(x)=\uparrow\!\!\bullet\!\!\rightarrow$　　$(x=0)$　　4･189

式4･182、式4･189が関数$\alpha_0(x)$の導関数である。式4･180、式4･181で$n=1$としたときの関数$\beta_1(x)$を式4･182、式4･189の導関数$\alpha_0'(x)$と比べると式4･190が得られる。

$\alpha_0'(x)=\beta_1(x)$　　4･190

［超関数$\beta_n(x)$の導関数］

式4･180から区間$x\neq0$において式4･191が成り立つ。

$\beta_n'(x)=0$　　$(x\neq0)$　　$(n=1、2、3、\cdot\cdot\cdot)$　　4･191

$n=1、2、3、\cdots$について、式4·192のように関数$\beta_n(x)$の導関数$j(x)$を表し、点$x=0$における関数値$j(0)$を求めるために、関数$\beta_n(x)$の成分のうち計算に用いる成分を式4·193、式4·194、式4·195、式4·196、式4·197のように書き出す。

$j(x)=\beta_n'(x)$ 4·192

$\beta_{nh}'(x)=0 \qquad (-\infty<x<+\infty)$ 4·193

$\beta_{nd}(0)=0$ 4·194

$\beta_{nn-1}(0)=0$ 4·195

$\beta_{nn}(0)=1$ 4·196

$\beta_{nn+1}(0)=0$ 4·197

式4·91、式4·92、式4·93、式4·97を用い、式4·193～式4·197を代入して成分を式4·198～式4·203のように計算する。

$j_h(0)=\lim_{\rho\to 0}\beta_{nh}'(-\rho)=0$ 4·198

$j_d(0)=\lim_{\rho\to 0}\{\beta_{nh}'(+\rho)-\beta_{nh}'(-\rho)\}=0-0=0$ 4·199

$j_1(0)=\beta_{nd}(0)=0$ 4·200

$j_n(0)=-(n-1)\beta_{nn-1}(0)=-(n-1)\cdot 0=0$ 4·201

$j_{n+1}(0)=-n\beta_{nn}(0)=-n\cdot 1=-n$ 4·202

$j_{n+2}(0)=-(n+1)\beta_{nn+1}(0)=-(n+1)\cdot 0=0$ 4·203

式4·198～式4·203を代入すると式4·204が得られる。

$\beta_n'(x)=-n\cdot {\uparrow\!\!\bullet\!\!\rightarrow}^{n+1} \qquad (x=0) \qquad (n=1、2、3、\cdots)$ 4·204

式4·180、式4·181の関数$\beta_n(x)$と式4·191、式4·204の導関数$\beta_n'(x)$を比べると式4·205が得られる。

$\beta_n'(x)=-n\cdot\beta_{n+1}(x) \qquad (n=1、2、3、\cdots)$ 4·205

[超関数$\beta_n(x)$のx倍]

式4·180から式4·206が成り立つ。

$x\cdot\beta_n(x)=0 \qquad (x\neq 0) \qquad (n=1、2、3、\cdots)$ 4·206

$n=2、3、4、\cdots$について、式4·207のように関数$\beta_n(x)$のx倍の関数$j(x)$を表し、点$x=0$における関数値$j(0)$をもとめるために関数$\beta_n(x)$の成分のうち、計算に用いる成分を式4·208、式4·194、式4·195、式4·196、

式4·197のように書き出す。式4·194、式4·195、式4·196、式4·197

$j(x)=x\cdot\beta_n(x)$ 4·207

$\beta_{nh}(0)=0$ 4·208

$\beta_{nd}(0)=0$ 4·194(再掲)

$\beta_{nn-1}(0)=0$ 4·195(再掲)

$\beta_{nn}(0)=1$ 4·196(再掲)

$\beta_{nn+1}(0)=0$ 4·197(再掲)

式4·79、式4·80、式4·77を用い、成分を式4·209、式4·210、式4·211、式4·212、式4·213のように計算する。式4·211～式4·213で$x'=1$、$x''=0$を用いる。

$j_h(x)=x\cdot\beta_{nh}(x)$ 4·209

$j_d(x)=x\cdot\beta_{nd}(x)$ 4·210

$j_{n-1}(x)=x\cdot\beta_{nn-1}(x)+1\cdot\beta_{nn}(x)$ 4·211

$j_n(x)=x\cdot\beta_{nn}(x)+1\cdot\beta_{nn+1}(x)$ 4·212

$j_{n+1}(x)=x\cdot\beta_{nn+1}(x)+1\cdot\beta_{nn+2}(x)$ 4·213

式4·208、式4·194～式4·197を式4·209～式4·213に代入して、式4·214、式4·215、式4·216、式4·217、式4·218が得られる。

$j_h(0)=0\cdot 0=0$ 4·214

$j_d(0)=0\cdot 0=0$ 4·215

$j_{n-1}(0)=0\cdot 0+1\cdot 1=1$ 4·216

$j_n(0)=0\cdot 1+1\cdot 0=0$ 4·217

$j_{n+1}(0)=0\cdot 0+1\cdot 0=0$ 4·218

式4·214～式4·218と式4·207から式4·219が成り立つ。

$x\cdot\beta_n(x)={\uparrow\!\!\bullet\!\!\rightarrow}^{n-1} \qquad (x=0)$ 4·219

式4·206、式4·219から式4·220が成り立つ。

$\beta_{n-1}(x)=x\cdot\beta_n(x) \qquad (n=2、3、4、\cdots)$ 4·220

[超関数$\beta_1(x)$のx倍]

$n=1$とすると式4·180から式4·221が成り立つ。

$x\cdot\beta_1(x)=0 \qquad (x\neq 0)$ 4·221

式4・222のように関数$\beta_1(x)$のx倍の関数j(x)を表し、点x＝0における関数値j(0)を求めるために、計算に用いる成分を式4・223、式4・224、式4・225、式4・226のように書き出す。

$j(x)=x\cdot\beta_1(x)$　　4・222

$\beta_{1h}(0)=0$　　4・223

$\beta_{1d}(0)=0$　　4・224

$\beta_{11}(0)=1$　　4・225

$\beta_{1n}(0)=0$　　4・226

式4・79、式4・80、式4・77を用い、成分を式4・227、式4・228、式4・229のように計算する。式4・229でx'＝1、x''＝0を用いる。

$j_h(x)=x\cdot\beta_{1h}(x)$　　4・227

$j_d(x)=x\cdot\beta_{1d}(x)$　　4・228

$j_n(x)=x\cdot\beta_{1n}(x)+1\cdot\beta_{1n+1}(x)$　　4・229

式4・223～式4・226を式4・227～式4・229に代入して式4・230、式4・231、式4・232、式4・233が得られる。

$j_h(0)=0\cdot0=0$　　4・230

$j_d(0)=0\cdot0=0$　　4・231

$j_1(0)=0\cdot1+1\cdot0=0$　　4・232

$j_n(0)=0\cdot0+1\cdot0=0$　　4・233

式4・230～式4・233と式4・222から式4・234が成り立つ。

$x\cdot\beta_1(x)=0$　　$(x=0)$　　4・234

式4・221、式4・234から式4・235が成り立つ。

$x\cdot\beta_1(x)=0$　　4・235

式4・235は式2・123(50頁参照)と意味が同じである。

[数値1と数値0]

　第n次の右半分整冪関数$\alpha_n(x)$、基本段差関数$\alpha_0(x)$、第n次の基本集中関数$\beta_n(x)$を併せて基本関数と呼ぶ。式4・143、式4・144の関数$\alpha_n(x)$は区間0≦xにおける整冪関数の係数が1である。関数値0の定数関数と整冪関数が点x＝0において接続している。数値1と数値0は基本的な数値であり、係数1と点x＝0を特徴とする関数$\alpha_n(x)$を基本関数と呼ぶことがふ

さわしい。式4・150、式4・151、式4・152の関数$\alpha_0(x)$は点x＝0において大きさ1の段差がある。区間x＜0においては関数値0の定数関数であり、区間0＜xにおいては関数値1の定数関数である。大きさ1と点x＝0を特徴とする関数$\alpha_0(x)$を基本関数と呼ぶことがふさわしい。式4・180、式4・181の関数$\beta_n(x)$は点x＝0において大きさ1の第n次の集中がある。区間x≠0においては関数値0の定数関数である。大きさ1と点x＝0を特徴とする関数$\beta_n(x)$を基本関数と呼ぶことがふさわしい。

[微分の連鎖]

　第n次の右半分整冪関数$\alpha_n(x)$はn＝2､3､4､・・・のとき、式4・148に示すように微分により次数が1次下がり、n倍されるから、関数$\alpha_n(x)$を微分し、$\frac{1}{n}$倍すれば、関数$\alpha_{n-1}(x)$が得られる。第1次の右半分整冪関数$\alpha_1(x)$は、式4・165に示すように微分により基本段差関数$\alpha_0(x)$が得られる。基本段差関数$\alpha_0(x)$は、式4・190に示すように微分により第1次の基本集中関数$\beta_1(x)$が得られる。第n次の基本集中関数$\beta_n(x)$はn＝1､2､3､・・・のとき、式4・205に示すように微分により次数が1次上がり、−n倍されるから、関数$\beta_n(x)$を微分し､$-\frac{1}{n}$倍すれば、関数$\beta_{n+1}(x)$が得られる。$\frac{1}{n}$倍や$-\frac{1}{n}$倍について注意すれば、関数$\alpha_n(x)$から出発して、微分を繰り返すことにより次々に、$\alpha_n(x)$､$\alpha_{n-1}(x)$､・・・､$\alpha_2(x)$､$\alpha_1(x)$､$\alpha_0(x)$､$\beta_1(x)$､$\beta_2(x)$､・・・､$\beta_{n-1}(x)$､$\beta_n(x)$が得られる。

$\alpha_n'(x)=n\cdot\alpha_{n-1}(x)$　　$(n=2､3､4､\cdots)$　　4・148(再掲)

$\alpha_1'(x)=\alpha_0(x)$　　4・165(再掲)

$\alpha_0'(x)=\beta_1(x)$　　4・190(再掲)

$\beta_n'(x)=-n\cdot\beta_{n+1}(x)$　　$(n=1､2､3､\cdots)$　　4・205(再掲)

基本関数は微分により連鎖した類縁の関数である。

[x倍の連鎖]

　式4・149、式4・179から式4・236が成り立つ。

$\alpha_{n+1}(x)=x\cdot\alpha_n(x)$　　$(n=0､1､2､3､\cdots)$　　4・236

式4・236と式4・220はx倍の連鎖であり、類似している。

$\beta_{n-1}(x)=x\cdot\beta_n(x)$　　(n＝2、3、4、・・・)　　4・220(再掲)

微分の連鎖においては式4・190により$\alpha_0(x)$と$\beta_1(x)$が連続するが、x倍の連鎖においては式4・235が成り立ち、$\alpha_0(x)$と$\beta_1(x)$は連続しない。

$x\cdot\beta_1(x)=0$　　4・235(再掲)

［横移動と定数倍と和と反転］

基本段差関数$\alpha_0(x)$に対して横移動と定数倍と和の演算を行えば、任意の段差を表示することができる。第n次の基本集中関数$\beta_n(x)$に対して横移動と定数倍と和の演算を行えば、左連続成分と段差成分が関数値0の定数関数であるような任意の超関数を表示することができる。第n次の右半分整冪関数$\alpha_n(x)$に対して反転と和の演算を行えば、式4・237のように整冪関数x^nが得られる。

$x^n=\alpha_n(x)+\alpha_n(-x)$　　4・237

点x＝0の周りでテイラー展開可能な関数$\phi(x)$は式3・35で表される。

$$\phi(x)=\phi(0)+\frac{\phi'(0)}{1!}x+\frac{\phi''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots \qquad 3\cdot35(再掲)$$

式3・35は式4・237の整冪関数x^nで表されているから、第n次の右半分整冪関数$\alpha_n(x)$に対して反転と定数倍と和の演算を行えば、左連続成分以外の全ての成分が関数値0の定数関数であるような任意の超関数を表示することができる。第n次の右半分整冪関数$\alpha_n(x)$、基本段差関数$\alpha_0(x)$、第n次の基本集中関数$\beta_n(x)$に対して横移動、定数倍、和、反転の演算を行えば、任意の超関数を表すことができる。任意の超関数を表すという意味からも基本関数と呼ぶことがふさわしい。

(13) 分布と成分表示型の超関数

［関数と分布］

分布は分布の場から分布する量への対応であるから、分布を記述するためには分布の場と分布する量を明示する必要がある。分布の場を構成する各点に分布する量が対応していなければならない。荷重の分布を考察する場合は材軸線が分布の場であり、荷重が分布する量である。分布の場を独立変数で表し、分布する量を従属変数で表すことができ、分布

を関数で表すことができる。分布の場から分布する量への対応を独立変数から従属変数への対応が表す。

［単位の異常］

材軸線に沿って座標を設定すると各点は座標の数値で表される。各点に分布する量は単純な数値ではない。対象から少し離れて全体的に観察すれば、単位の異なる3種類の荷重が作用している。分布荷重$f_0(x)$の単位N/m、集中荷重$f_1(x)$の単位N、集中モーメント$f_2(x)$の単位Nmであり、超関数f(x)で表す。対象に近付いて詳細に観察すれば、3種類の荷重の単位N/mで共通であり、近似関数F(x)で表す。超関数f(x)が近似関数F(x)と同じ単位N/mを持つと考えて、単位を添えて式1・29のように書く。

$f(x)N/m=f_0(x)N/m+f_1(x)N+f_2(x)Nm$　　1・29(再掲)

式1・29の超関数f(x)は成分$f_0(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$を統合しているから、超関数f(x)の単位がN/mが代表単位である。式1・29は荷重の単位がN/mと思っているときに、単位Nや単位Nmが出現した状況を示しており、単位の異常である。単位の異常を伴う分布を表現するために成分表示型の超関数を用いる。

［基本離散関数とディラック関数］

大きさ1の量が点x＝0に集中して分布している現象をディラック関数$\delta(x)$が表すと考えられている。式3・36(62頁参照)で$\rho\to0$とすると、式4・238が成り立ち、式4・239が成り立つ。

$$\lim_{\rho\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\rho}^{+\rho}\Delta(x)\,dx=1 \qquad 4\cdot238$$

$$\int_{-0}^{+0}\delta(x)\,dx=1 \qquad 4\cdot239$$

式4・239の積分区間$-0<x<+0$が点x＝0と同一視されるから、式4・239の右辺の数値1と点x＝0が関係付けられている。大きさ1の量が点x＝0に集中して分布している現象を表すには、関数$\delta(x)$の他にも、式4・240、式4・241の関数$\kappa(x)$を用いることが考えられる。

$\kappa(x)=1$　　(x＝0)　　4・240

$\kappa(x)=0$　　(x≠0)　　4・241

数値1と数値0は基本的な数値であり、点x＝0における関数値1を特徴とする関数$\boldsymbol{\kappa}$(x)を基本離散関数と呼ぶ。大きさ1の量が点x＝0に集中して分布している現象を表すことは同じであっても、ディラック関数δ(x)と基本離散関数$\boldsymbol{\kappa}$(x)は性質が異なる。ディラック関数δ(x)は近似関数Δ(x)の性質を引き継ぐので、点x＝0においても微分可能であるが、基本離散関数$\boldsymbol{\kappa}$(x)は微分不能である。基本離散関数$\boldsymbol{\kappa}$(x)について式4･239と同じ積分を行うと、点x＝0が積分不能であるから、式4･242の右辺の広義積分が収束しない。

$$\int_{-0}^{+0}\boldsymbol{\kappa}(x)\,dx=\lim_{\zeta\to 0}\int_{-\zeta}^{+\zeta}\boldsymbol{\kappa}(x)\,dx \qquad (\text{収束しない}) \qquad 4\cdot 242$$

式4･239と式4･242は積分の結果が異なっている。ディラック関数δ(x)は大きさ1の量が積分値で表され、積分値の単位は従属変数の単位と独立変数の単位の積であり、単位の異常を示唆する。基本離散関数$\boldsymbol{\kappa}$(x)は大きさ1の量が関数値で表され、関数値の単位は従属変数の単位であり、単位の異常を示唆しない。

［分布の場と分布する量の完全な対応］

分布荷重$f_0(x)$は左連続成分$f_h(x)$と段差成分$f_d(x)$から構成され、超関数は式1･34の関数配列または式1･33の関数擬値で表される。

$$f(x)=\{f_h(x), f_d(x), f_1(x), f_2(x)\} \qquad 1\cdot 34(\text{再掲})$$

$$f(x)=f_h(x)+f_d(x)\,+f_1(x)\,+f_2(x)\,{}^2 \qquad 1\cdot 33(\text{再掲})$$

分布する量が単一の数値で表されるのであれば、分布する量を従属変数とする関数で分布を表現するのが自然である。普通の関数も成分1個型の超関数と考えることができ、成分表示型の超関数が分布を表すと解釈することができる。荷重の分布は成分4個型の超関数であるが、分布する量の性質に応じて成分数の異なる超関数を用いることができる。汎関数型の超関数は特異点において関数値が定義されず、独立変数から従属変数への対応が不完全である。成分表示型の超関数は汎関数型の超関数と異なり、特異点においても関数配列または関数擬値が定義され、独立変数から従属変数へ完全に対応している。成分表示型の超関数の方が汎関数型の超関数よりも分布を表現するのにふさわしい。