1・75の関係が知られている。

$$\frac{d}{dx}s_z(x)=-g_z(x) \qquad 1・74$$

$$\frac{d}{dx}m_z(x)=s_z(x) \qquad 1・75$$

しかし、集中力の作用点x＝0、x＝a、x＝ℓにおいては微分不能であり、式1・74、式1・75は成り立たない。式1・59で表される剪断力S(x)と式1・68で表される曲げモーメントM(x)は、点x＝0、x＝a、x＝ℓに対応する点域$-\alpha \leqq x \leqq \alpha$、$a-\nu \leqq x \leqq a+\nu$、$\ell-\beta \leqq x \leqq \ell+\beta$においても微分可能であり、式1・76、式1・77のように計算される。

$$\frac{d}{dx}S(x)=-G(x) \qquad 1・76$$

$$\frac{d}{dx}M(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\alpha}^{x}(t-x)G(t)dt=\frac{d}{dx}\int_{-\alpha}^{x}tG(t)dt-\frac{d}{dx}x\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt$$

$$=xG(x)-(\frac{d}{dx}x)\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt-x\frac{d}{dx}\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt$$

$$=xG(x)-\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt-xG(x)=-\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt=S(x) \qquad 1・77$$

従来の構造力学における剪断力や曲げモーメントは、集中力の作用点において微分不能である。凝視関数で示される剪断力や曲げモーメントは、集中力の作用点に対応する点域において、図1-16の曲線AGCや図1-17の曲線ACBのように滑らかであり、微分可能である。

第2章　汎関数型の超関数

(1)　積分不能点を含む区間の広義積分

［定義］

関数f(x)が点x＝cで積分不能のときでも、補助変数ε、ζを用いて式2・1の第1辺の極限が収束するとき、関数f(x)は区間$a \leqq x \leqq b$で広義積分可能であると言う。ただし、a＜c＜bとする。

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\zeta \to 0}\int_{c+\zeta}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c-0}f(x)dx+\int_{c+0}^{b}f(x)dx$$

$$=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx \qquad 2・1$$

式2・1の点x＝cは積分不能ではあるが広義積分可能な点である。積分不能ではあるが広義積分可能な点は、連続的に存在する積分可能な点の中に離散的にしか存在しない。式2・1の第2辺は広義積分であることを明示するために、積分端点をc-0やc+0と表示しているが、明示する必要のないときは式2・1の第3辺、第4辺のように表示する。第4辺の表示においては積分不能な点x＝cが意識されない。式1・1、式1・2の関数$f_h(x)$は点x＝a、x＝bで右側積分不能であるが、広義積分可能である。

$$f_h(x)=0 \qquad (0 \leqq x \leqq a、b < x \leqq \ell) \qquad 1・1(再掲)$$

$$f_h(x)=W \qquad (a < x \leqq b) \qquad 1・2(再掲)$$

積分区間$a \leqq x \leqq b$について言えば点x＝aで積分不能であるから、式1・14の広義積分(5頁参照)が用いられる。

［例］

式2・1の第1辺の計算を見ると、区間$c-\varepsilon \leqq x \leqq c+\zeta$が積分の計算から除外されている。$\varepsilon \to 0$、$\zeta \to 0$の極限を考えるから、積分不能な点x＝cが除外されることになる。点x＝cが除外されるから、点x＝cが定義域外であっても、式2・1の広義積分を定義することができる。式2・2、式2・3、式2・4のf(x)は図2-1のように図示される。

$f(x)=\frac{1}{2}x \qquad (-\infty<x<2) \qquad 2\cdot2$

$f(x)=\frac{1}{2}x+1 \qquad (2<x<+\infty) \qquad 2\cdot3$

$f(x)=$(不定義) 　　(x＝2) 　　2・4

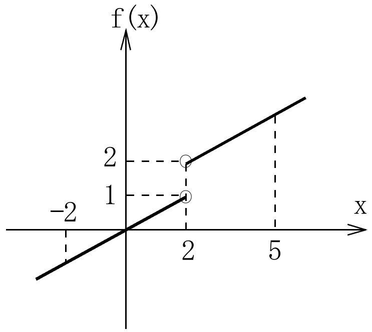

図2-1　点x＝2は定義域外

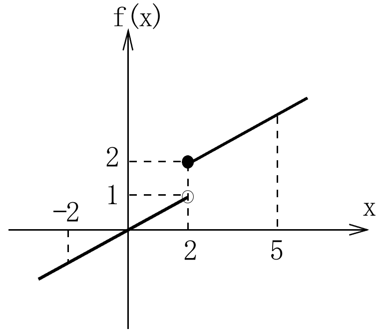

図2-2　点x＝2は右側積分可能

式2・4は点x＝2において、定義域外であることを明示するために不定義と表示している。定義域外の点x＝2を含む区間-2≦x≦5で式2・2、式2・3、式2・4のf(x)は広義積分可能であり、式2・5のように計算される。

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2-0}\frac{1}{2}x\,dx+\int_{2+0}^{5}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_{2}^{5}$$

$$=\left\{\frac{1}{4}(4-4)\right\}+\left\{\frac{1}{4}(25-4)+(5-2)\right\}=0+\frac{1}{4}\times21+3=\frac{1}{4}\times(21+12)=\frac{33}{4} \qquad 2\cdot5$$

式2・2、式2・3、式2・6のf(x)は図2-2のように図示される。

$f(x)=2 \qquad (x=2) \qquad 2\cdot6$

式2・6は点x＝2において関数値が一義的に決まっていることを示しているが、$\lim_{\varepsilon\to0}f(2-\varepsilon)$とは異なっており、不連続である。不連続点x＝2を含む区間-2≦x≦5で式2・2、式2・3、式2・6のf(x)は広義積分可能であり、式2・7のように計算される。

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2-0}\frac{1}{2}x\,dx+\int_{2}^{5}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_{2}^{5}$$

$$=\frac{33}{4} \qquad 2\cdot7$$

式2・2、式2・3、式2・4のf(x)と式2・2、式2・3、式2・6のf(x)は広義積分を計算すると、式2・5､式2・7のように同じ結果が得られる。関数を定義する場合、定義域を記述することが重要である。数値xを定めるとそれに応じて数値yが定まるような規則がある場合にyはxの関数であると言う。数値xを独立変数、数値yを従属変数と言う。独立変数xの値の集合を定義域と言う。点x＝2において関数の定義に適合しないから、点x＝2は式2・2、式2・3､式2・4のf(x)の定義域には含まれない。点x＝2を含む区間-2≦x≦5を定義域とすると、式2・2、式2・3、式2・4のf(x)は関数ではない。式2・5は積分区間として区間-2≦x≦5を用いており、関数でないものを積分していることになる。広義積分を考えるときには、意識しないうちに、関数でないものを考察の対象に含めている場合があるので、注意が必要である。点x＝2は、式2・2、式2・3、式2・4のf(x)について、定義域外の点であり、広義積分可能な点である。点x＝2は、式2・2、式2・3、式2・6のf(x)について、定義域内の点であり、不連続ではあるが広義積分可能な点である。

[例]

式2・8の関数f(x)は図2-3のように図示される。

$f(x)=\frac{1}{x-2} \qquad 2\cdot8$

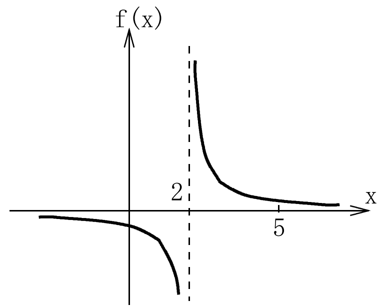

図2-3　$f(x)=\frac{1}{x-2}$

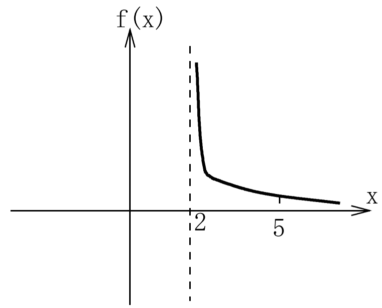

図2-4　$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$$f(x)=(\text{不定義}) \qquad (x=2) \qquad\qquad 2\cdot4(\text{再掲})$$

点x＝2において式2･8から関数値を計算することができず、関数値が一義的に決まっていない。点x＝2について特段の言及が無いときは式2･4が想定されている。区間2≦x≦5で式2･9の第4辺が収束せず、広義積分を定義することができない。

$$\int_{2+0}^{5} f(x)dx=\lim_{\zeta\to0}\int_{2+\zeta}^{5}\frac{1}{x-2}dx=\lim_{\zeta\to0}[\log(x-2)]_{2+\zeta}^{5}=\log3-\lim_{\zeta\to0}\log\zeta \qquad 2\cdot9$$

点x＝2は、式2･8の関数f(x)について定義域外の点であり、広義積分不能な点である。

[例]

式2･10の関数f(x)は図2-4のように図示さる。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}} \qquad\qquad 2\cdot10$$

点x＝2において式2･10から関数値を計算することができず、関数値が一義的に決まっていない。x＜2において式2･10から関数値を計算すると虚数になるから、実数の範囲で考えると関数値は存在しない。特段の言及が無ければ、区間-∞＜x≦2は式2･10のf(x)の定義域外である。関数値が一義的に決まっていない点x＝2を含む区間2≦x≦5で式2･10のf(x)は広義積分可能であり、式2･11のように計算される。

$$\int_{2+0}^{5} f(x)dx=\lim_{\zeta\to0}\int_{2+\zeta}^{5}\frac{1}{\sqrt{x-2}}dx=\lim_{\zeta\to0}[2\sqrt{x-2}]_{2+\zeta}^{5}$$
$$=2(\sqrt{3}-\lim_{\zeta\to0}\sqrt{\zeta})=2\sqrt{3} \qquad\qquad 2\cdot11$$

点x＝2は、式2･10のf(x)について定義域外の点であり、広義積分可能な点である。

(2)　積分区間の長さが無限大の広義積分

[定義]

関数f(x)が補助変数R、Sを用いて式2･12の左辺の極限が収束するとき、関数f(x)は広義積分可能であると言う。

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{S\to\infty}\int_{-R}^{S} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad\qquad 2\cdot12$$

式2･1は積分不能点に関する広義積分であり、式2･12は積分区間の長さが無限大のときの広義積分であり、同じではないが、極限を用いて定義されることが類似している。

[例]

式2･13の関数f(x)は図2-5のように図示され、式2･12の型の広義積分可能関数である。

$$f(x)=\exp(-x^2) \qquad\qquad 2\cdot13$$

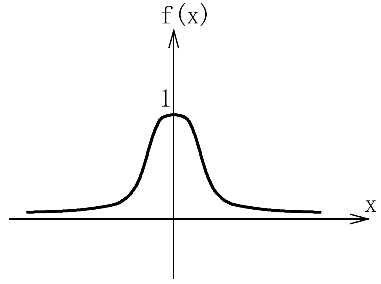

図2-5　f(x)＝exp(-x²)

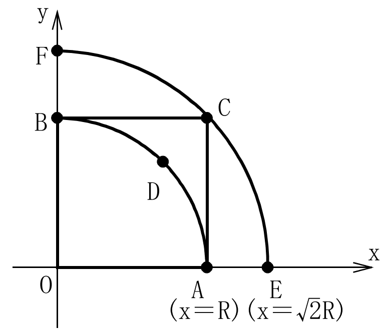

図2-6　面積分の領域

式2･13の関数f(x)は偶関数であるから式2･14が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)dx=2\int_{0}^{+\infty}\exp(-x^2)dx \qquad\qquad 2\cdot14$$

図2-6の正方形OACBで関数exp(-x²-y²)を面積分する。

$$\int_{\square OACB}\exp(-x^2-y^2)dxdy=\int_0^R\int_0^R\exp(-x^2-y^2)dx$$
$$=\int_0^R\exp(-x^2)dx\int_0^R\exp(-y^2)dy=(\int_0^R\exp(-x^2)dx)^2 \qquad\qquad 2\cdot15$$

式2･15の最後辺から式2･14の右辺が求められる。図2-6の扇形OADBと扇形OECFで関数exp(-x²-y²)を面積分すると式2･16の不等式が成り立つ。

$$\int_{⊿OADB}\exp(-x^2-y^2)dxdy\leqq\int_{\square OACB}\exp(-x^2-y^2)dxdy\leqq\int_{⊿OECF}\exp(-x^2-y^2)dxdy \qquad 2\cdot16$$

式2·17、式2·18の座標変換を行うと、表2=1のように積分区間が対応し、式2·19が成り立つから、式2·20のように計算される。

表2=1 積分区間の対応

x	0 → R
y	0 → R
r	0 → R
θ	0 → $\frac{\pi}{2}$

$$x = r\cos\theta \qquad 2\cdot17$$

$$y = r\sin\theta \qquad 2\cdot18$$

$$dxdy = rdrd\theta \qquad 2\cdot19$$

$$\int_{\triangle OADB} \exp(-x^2-y^2)\,dxdy = \int_{\triangle OADB} \exp(-r^2)\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^R \exp(-r^2)\,rdr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^R (-2r)\exp(-r^2)\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\exp(-r^2)\right]_0^R \times [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\{\exp(-R^2)-1\} \times \left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\{1-\exp(-R^2)\} \qquad 2\cdot20$$

同じように計算すれば、式2·21が得られる。

$$\int_{\triangle OECF} \exp(-x^2-y^2)\,dxdy = \frac{\pi}{4}\{1-\exp(-2R^2)\} \qquad 2\cdot21$$

式2·20、式2·21でR→∞の極限を取れば、式2·22、式2·23が得られる。

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\triangle OADB} \exp(-x^2-y^2)\,dxdy = \frac{\pi}{4} \qquad 2\cdot22$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\triangle OECF} \exp(-x^2-y^2)\,dxdy = \frac{\pi}{4} \qquad 2\cdot23$$

式2·22、式2·23を式2·16に代入すれば、式2·24が得られる。

$$\frac{\pi}{4} \leqq \lim_{R\to\infty}\int_{\square OACB} \exp(-x^2-y^2)\,dxdy \leqq \frac{\pi}{4} \qquad 2\cdot24$$

式2·24、式2·15から式2·25が得られ、式2·25から式2·26が得られる。

$$\lim_{R\to\infty}\left\{\int_0^R \exp(-x^2)\,dx\right\}^2 = \left\{\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx\right\}^2 = \frac{\pi}{4} \qquad 2\cdot25$$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad 2\cdot26$$

式2·14に代入すると式2·27が得られ、式2·12の型の広義積分である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx = 2\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \qquad 2\cdot27$$

[例]

式2·28の関数f(x)は式2·12の型の広義積分可能関数である。

$$f(x) = x\cdot\exp(-x^2) \qquad 2\cdot28$$

関数$x\cdot\exp(-x^2)$を積分するために関数$\exp(-x^2)$を微分する。

$$\{\exp(-x^2)\}' = (-2x)\cdot\exp(-x^2)$$

$$x\cdot\exp(-x^2) = -\frac{1}{2}\{\exp(-x^2)\}' \qquad 2\cdot29$$

式2·29の両辺を$-\infty < x < +\infty$で積分すると式2·30が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\exp(-x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\exp(-x^2)\right]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{1}{2}\times(0-0) = 0 \qquad 2\cdot30$$

[例]

式2·31の関数f(x)も式2·12の型の広義積分可能である。

$$f(x) = x^n\cdot\exp(-x^2) \qquad 2\cdot31$$

ただし、nは非負整数であり、式2·13は式2·31でn=0の場合、式2·28は式2·31でn=1の場合である。n=2、3、4、・・・として関数$x^n\cdot\exp(-x^2)$を積分するために関数$x^{n-1}\cdot\exp(-x^2)$を微分する。

$$\{x^{n-1}\cdot\exp(-x^2)\}' = (n-1)x^{n-2}\cdot\exp(-x^2) + x^{n-1}(-2x)\exp(-x^2)$$

$$x^n\cdot\exp(-x^2) = \frac{n-1}{2}x^{n-2}\cdot\exp(-x^2) - \frac{1}{2}\{x^{n-1}\cdot\exp(-x^2)\}' \qquad 2\cdot32$$

式2·32の両辺を区間$-\infty < x < +\infty$で積分する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\cdot\exp(-x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n-1}{2}x^{n-2}\cdot\exp(-x^2)\,dx - \frac{1}{2}\left[x^{n-1}\cdot\exp(-x^2)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\cdot\exp(-x^2)\,dx = \frac{n-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2}\cdot\exp(-x^2)\,dx \qquad 2\cdot33$$

式2·33の被積分関数に注目すると左辺のx^nが右辺のx^{n-2}に対応しているから、式2·33を再帰的に用いるとnが偶数のとき式2·34が得られ、nが奇数のとき式2·35が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot \exp(-x^2)\,dx = \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)\,dx$$

$$= \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} \qquad (\text{nが偶数}) \qquad 2\cdot34$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot \exp(-x^2)\,dx = \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\exp(-x^2)\,dx$$

$$= \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot 0 = 0 \qquad (\text{nが奇数}) \qquad 2\cdot35$$

式2・27、式2・30、式2・34、式2・35から、n＝0、1、2、3、・・・のとき、式2・31の関数f(x)は式2・12の型の広義積分可能である。

(3)　汎関数

［定義］

関数ϕ(x)を定めるとそれに応じて数値vが定まるような規則がある場合にvはϕ(x)の汎関数であると言い、式2・36のように表す。

$$v = \tau(\phi) \qquad 2\cdot36$$

式2・36では文字τが汎関数である。汎関数は関数と類似しているが、異なる点もあるので注意が必要である。数値xを定めるとそれに応じて数値yが定まるような規則がある場合にyはxの関数であると言い、式2・37のように表す。

$$y = f(x) \qquad 2\cdot37$$

関数と汎関数の比較を表2=2に示す。先に関数ϕ(x)や数値xを定めるか

表2=2　関数と汎関数

関数　　y＝f(x)	独立変数 x	従属変数 y	定義域
汎関数　v＝$\tau(\phi)$	関数 ϕ(x)	数値 v	関数ϕの集合

ら、関数ϕ(x)や数値xは入力要素であり、それに応じて数値vや数値yが定まるから、数値vや数値yは出力要素である。汎関数と関数の出力要素は数値で同じであるが、汎関数の入力要素は関数であり、関数の入力要素は数値であり、異なっている。汎関数と関数は同型の記号を用いる。汎関数の記号は入力要素ϕを括弧()で包んで文字τに付属させる。関数の

記号は入力要素xを括弧()で包んで文字fに付属させる。汎関数の入力要素の集合についても、関数の定義域と同じように注意を払う必要がある。

［例］

式2・38～式2・42は汎関数の例である。式2・38の右辺のϕ(0)は数値であり、関数ϕ(x)を定めるとそれに応じて定まるから、式2・38は汎関数である。

$$\tau(\phi) = \phi(0) \qquad 2\cdot38$$

独立変数の値0は他の数値であっても定数であれば良い。独立変数xを固定すると、入力要素ϕに対して式2・38の型の汎関数が得られる。

［例］

式2・39の右辺は関数ϕ(x)の定積分であり、関数ϕ(x)を定めるとそれに応じて定まるから、式2・39は汎関数である。

$$\tau(\phi) = \int_3^{11}\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot39$$

積分の端点の3と11は他の数値であっても定数であれば良い。積分の両端を固定すると、入力要素ϕに対して式2・39の型の汎関数が得られる。式2・39のように積分を用いて汎関数を定義している場合は、式2・1や式2・12の広義積分を用いる場合がある。積分不能点の広義積分を用いる場合には、式2・2、式2・3、式2・4のf(x)のように関数でないものも、汎関数の入力要素ϕになることができる。無限区間の広義積分を用いる場合には、積分端点が$-\infty$や$+\infty$になる。

［例］

関数f(x)と入力要素ϕ(x)を掛け算すると、新たな関数f(x)ϕ(x)を作ることができ、関数f(x)ϕ(x)と式2・39の型の汎関数を組み合わせると式2・40のように新たな汎関数を作ることができる。

$$\tau(\phi) = \int_3^{11} f(x)\,\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot40$$

［例］

関数f(x)と入力要素ϕ(x)を組み合わせると、新たな関数f(ϕ(x))を作ることができ、関数f(ϕ(x))と式2・38の型の汎関数を組み合わせると式

2·41のように新たな汎関数を作ることができる。

$$\tau(\phi)=f(\phi(0)) \qquad 2·41$$

［例］

関数$f(x)$と入力要素$\phi(x)$を組み合わせると、新たな関数$f(\phi(x))$を作ることができ、関数$f(\phi(x))$と式2·39の型の汎関数を組み合わせると式2·42のように新たな汎関数を作ることができる。

$$\tau(\phi)=\int_{3}^{11} f(\phi(x))\,dx \qquad 2·42$$

式2·40、式2·41、式2·42の型の汎関数については、関数$f(x)$と汎関数が1対1に対応する。

(4)　超関数の定義

［急減少関数と緩増加関数］

式2·43の右辺の極限が収束するとき、関数$f(x)$は急減少関数であると言う。補助変数R、Sは実数である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\lim_{S\to\infty}\int_{-R}^{S} f(x)\,dx \qquad 2·43$$

式(11)の右辺の極限が収束するためには少なくとも、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$のとき$f(x)\to0$とならなければならない。関数$f(x)$が急減少関数であるとき、関数$g(x)$が急減少関数でなくとも、積$f(x)g(x)$が急減少関数になる場合がある。このとき、関数$g(x)$は緩増加関数であると言う。急減少関数と緩増加関数は超関数の定義において重要な役割を果たす。

［積分不能点を含む急減少関数］

式2·44、式2·45の関数$\Delta(x)$は式2·43の積分が収束するから急減少関数である。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon} \qquad (0<x<\varepsilon) \qquad 2·44$$

$$\Delta(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq0,\ \varepsilon\leqq x<+\infty) \qquad 2·45$$

式2·44、式2·45の関数$\Delta(x)$は、2点$x=0$、$x=\varepsilon$で不連続であり、積分不能であるが、積分不能点を除外する広義積分を用いて積分する。

［無限回微分可能な急減少関数］

式2·27、式2·30、式2·34、式2·35の積分が収束するから、$n=0、1、2、3、\cdots$のとき、式2·31の関数$f(x)$は急減少関数である。

$$f(x)=x^{n}\cdot\exp(-x^{2}) \qquad (n=0、1、2、3、\cdots) \qquad 2·31(再掲)$$

式2·31の関数$f(x)$は無限回微分可能である。

［無限回微分可能な緩増加関数］

式2·31の急減少関数$f(x)$は式2·46の整羃関数$g(x)$と式2·13の急減少関数$f(x)$の積であるから、式2·46の整羃関数$g(x)$は緩増加関数である。

$$g(x)=x^{n} \qquad (n=0、1、2、3、\cdots) \qquad 2·46$$

$$f(x)=\exp(-x^{2}) \qquad 2·13(再掲)$$

式2·46の緩増加関数$g(x)$を足し合わせた式2·47の整羃多項式$g(x)$は緩増加関数である。

$$g(x)=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{1}x+a_{0} \qquad 2·47$$

係数a_{n}、a_{n-1}、・・・、a_{1}、a_{0}は実数であり、nは非負整数である。式2·47の関数$g(x)$は無限回微分可能である。

［定義］

補助変数εと独立変数xを含む近似関数$F(x)$と無限回微分可能な急減少関数$\phi(x)$を用いて、式2·48の左辺が数値$\tau(\phi)$に収束するとき、近似関数$F(x)$が超関数$f(x)$を定義すると言い、式2·49のように書く。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\phi(x)\,dx=\tau(\phi) \qquad 2·48$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx=\tau(\phi) \qquad 2·49$$

関数$\phi(x)$を変えると数値$\tau(\phi)$が変わるから式2·48は汎関数である。式2·47の関数$g(x)$と式2·13の関数$f(x)$の積は急減少関数であり、係数a_{n}、a_{n-1}、・・・、a_{1}、a_{0}を変化させると、関数を任意に変化させることができるから、式2·48、式2·49の関数$\phi(x)$として用いることができる。汎関数$\tau(\phi)$が超関数$f(x)$に対応し、母汎関数と呼ぶ。式2·48において同一の母汎関数$\tau(\phi)$に収束する近似関数$F(x)$は無数に多く存在し、同等な近似関数と呼ぶ。式2·48と式2·49を組み合わせて、式2·50と表示することも

できる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(x)\,\phi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(x)\,\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot 50$$

式2･48の左辺の補助変数εの極限操作をする前には、式2･51のように補助変数εを含んだ汎関数$T(\phi)$を考えることができる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(x)\,\phi(x)\,dx = T(\phi) \qquad 2\cdot 51$$

式2･51の左辺は、積分区間が$-\infty < x < +\infty$の広義積分を用いた式2･40の型の汎関数である。汎関数$T(\phi)$は補助変数$\varepsilon\to 0$に伴って式2･52のように母汎関数$\tau(\phi)$に収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T(\phi) = \tau(\phi) \qquad 2\cdot 52$$

近似関数F(x)が汎関数$T(\phi)$に対応し、超関数f(x)が母汎関数$\tau(\phi)$に対応している。

［微分可能な超関数］

近似関数の性質を超関数が引き継ぐから、近似関数が微分可能なとき、超関数は微分可能である。同等な多くの近似関数の中に微分可能なものが存在するので微分可能な近似関数を選ぶことにより、超関数が微分可能であると考えることができる。微分を考える必要がない場合には、式2･44、式2･45の関数$\Delta(x)$のような不連続な急減少関数を近似関数に用いても良い。その場合には積分不能点の広義積分を用いる。超関数について微分するとき支障ないように、入力要素として無限回微分可能な急減少関数$\phi(x)$を用いる。近似関数が急減少関数であるときには、無限回微分可能な緩増加関数$\phi(x)$を入力要素として用いても良い。近似関数は必要な回数だけ微分可能であれば良い。

［関数と見なせる超関数］

補助変数$\varepsilon\to 0$に伴って近似関数F(x)が関数f(x)に収束するならば式2･53のように書くことができる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{F}(x) = \mathrm{f}(x) \qquad (-\infty < x < +\infty) \qquad 2\cdot 53$$

記号f(x)は独立変数xの値を決めたときの従属変数の値をも意味するので、式2･53の両辺は数値である。式2･53は独立変数の値を決めた各点における収束を意味している。式2･53と書ける場合は式2･49の左辺の超関数f(x)と式2･53で収束する関数f(x)が一致する。式2･49の左辺のf(x)が超関数であり、かつ、関数である。微分可能な緩増加関数はそのままで超関数である。急減少関数は緩増加関数に含まれるから、微分可能な急減少関数はそのままで超関数である。

［例］

式2･54のf(x)は整冪多項式であるから、緩増加関数であり、式2･55のように無限回微分可能な急減少関数$\phi(x)$を入力要素とする汎関数$\tau(\phi)$を作ることができる。

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x+1 \qquad 2\cdot 54$$

$$\tau(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}x+1\right)\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot 55$$

式2･55の汎関数$\tau(\phi)$に収束する式2･48の左辺の近似関数F(x)は超関数f(x)を定義する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(x)\,\phi(x)\,dx = \tau(\phi) \qquad 2\cdot 48(\text{再掲})$$

式2･48を満足する近似関数F(x)は無数に多く存在するが、式2･56はその例である。

$$\mathrm{F}(x) = \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x+(1+\varepsilon) \qquad 2\cdot 56$$

式2･56の近似関数は式2･57に示すように式2･53の型の極限操作を行うことができる場合に該当する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{F}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x+(1+\varepsilon)\right\} = \frac{1}{2}x+1 \qquad 2\cdot 57$$

式2･55、式2･48で定義される超関数f(x)と式2･54の関数f(x)は一致する。式2･54の関数f(x)はそのままで式2･55、式2･48で定義される超関数f(x)であると言い換えることができる。

［関数と見なせない超関数］

近似関数が常に関数に収束するならば、わざわざ式2･48、式2･49を用いて超関数を定義する意味はないので、近似関数が関数に収束しない場

合も想定されている。近似関数が関数に収束しない場合は式2・53のように書けない。式2・53が収束しない点を特異点と言う。超関数の定義においては、近似関数F(x)に対して直接に式2・53の極限操作するのではなく、汎関数$T(\phi)$に対して式2・52の極限操作する。

[ディラック関数]

式2・48の汎関数$\tau(\phi)$として式2・58の母汎関数$\gamma(\phi)$を用いると、ディラック関数$\delta(\mathrm{x})$が定義される。

$$\gamma(\phi)=\phi(0) \qquad 2\cdot58$$

式2・48は式2・59と書き換えられ、式2・49は式2・60と書き換えられる。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(\mathrm{x})\,\phi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\gamma(\phi) \qquad 2\cdot59$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\mathrm{x})\,\phi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\gamma(\phi) \qquad 2\cdot60$$

式2・59を満足する関数$\Delta(\mathrm{x})$は無数に多く存在し、同等な近似関数と呼ばれる。少なくとも式2・61が式2・59を満足する。

$$\Delta(\mathrm{x})=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2) \qquad 2\cdot61$$

式2・61は図2-7に図示される。x→-∞とx→+∞でx軸に漸近し、点x＝0に

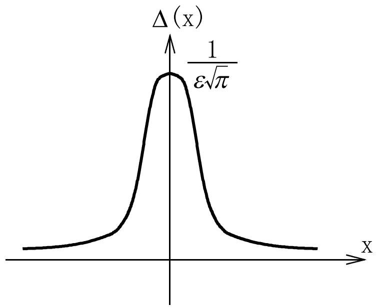

図2-7　近似関数 $\Delta(\mathrm{x})$

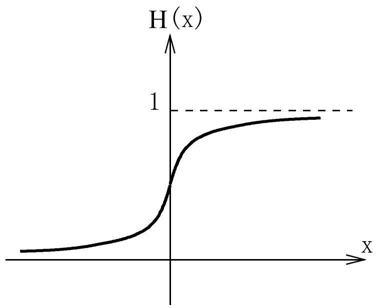

図2-8　近似関数 $H(\mathrm{x})$

頂点を持つ山の形をしている。$\varepsilon\to0$に伴って山は高くやせ型になり、曲線の山の頂点以外の部分が漸近線に近づく。

[式2・59の確認]

式2・61が式2・59を満足することは式2・62、式2・63の計算で確かめられる。

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)\,\phi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}-\phi(0)\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)\{\phi(\mathrm{x})-\phi(0)\}\mathrm{dx}\right|$$

$$\leqq\{\max|\phi'(\mathrm{x})|\}\cdot\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)|\mathrm{x}|\}\mathrm{dx}$$

$$=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\max|\phi'(\mathrm{x})| \qquad 2\cdot62$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)\,\phi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}-\phi(0)\right|=0 \qquad 2\cdot63$$

式2・62の計算の中で式2・64、式2・65、2・66、式2・67が用いられている。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)=1 \qquad 2\cdot64$$

$$\left|\frac{\phi(\mathrm{x})-\phi(0)}{\mathrm{x}}\right|\leqq|\max\phi'(\mathrm{x})| \qquad 2\cdot65$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)|\mathrm{x}|\}\mathrm{dx}=2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)\mathrm{xdx} \qquad 2\cdot66$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)\mathrm{xdx}=-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\exp(-(\frac{\mathrm{x}}{\varepsilon})^2)(\frac{-2}{\varepsilon}\mathrm{x})\mathrm{dx}=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \qquad 2\cdot67$$

式2・61の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$は点x＝0において$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta(\mathrm{x})$が収束せず、式2・53の型の収束により、関数$\delta(\mathrm{x})$を定義することができない。式2・61の近似関数$\Delta(\mathrm{x})$に対応する汎関数$\Gamma(\phi)$は式2・68で表される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(\mathrm{x})\,\phi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\Gamma(\phi) \qquad 2\cdot68$$

式2・68の汎関数$\Gamma(\phi)$は式2・69のように式2・58の母汎関数$\gamma(\phi)$に収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Gamma(\phi)=\gamma(\phi) \qquad 2\cdot69$$

式2・69が成り立つから式2・52の型の収束により、超関数$\delta(\mathrm{x})$を定義する

ことができる。

[ヘビサイド関数]

母汎関数として式2･70の汎関数$\iota(\phi)$を用いるとヘビサイド関数η(x)が定義される。

$$\iota(\phi)=\int_{0}^{+\infty}\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot 70$$

式2･48は式2･71と書き換えられ、式2･49は式2･72と書き換えられる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\,\phi(x)\,dx=\iota(\phi) \qquad 2\cdot 71$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(x)\,\phi(x)\,dx=\iota(\phi) \qquad 2\cdot 72$$

式2･71を満足する関数H(x)は無数に多く存在し、同等な近似関数と呼ばれる。少なくとも式2･73が式2･71を満足する。

$$H(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^{2})\,dx \qquad 2\cdot 73$$

式2･73は図2-8に図示される。x→-∞でx軸に漸近し、xの増加に伴って単調に増加し、x→+∞で直線y＝1に漸近する。ε→0に伴って曲線の点x＝0付近以外の部分が漸近線に近付き、点x＝0付近で急勾配になる。式2･73の近似関数H(x)は点x＝0において$\lim_{\varepsilon\to 0}H(x)$が収束せず、式2･53の型の収束により、関数$\eta$(x)を定義することができない。式2･73の近似関数H(x)に対応する汎関数$I(\phi)$は式2･74で表される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\,\phi(x)\,dx=I(\phi) \qquad 2\cdot 74$$

式2･74の汎関数$I(\phi)$は式2･75のように式2･70の汎関数$\iota(\phi)$に収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I(\phi)=\iota(\phi) \qquad 2\cdot 75$$

式2･75が成り立つから式2･52の型の収束により、超関数η(x)を定することができる。

[超関数と見なせない関数]

式2･8、式2･4の関数f(x)は点x＝2において発散し、式2･76の広義積分は収束しないから、式2･8、式2･4の関数f(x)に対して式2･77の汎関数

$\tau(\phi)$は存在しない。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-2}\cdot\phi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{2-\varepsilon}\frac{1}{x-2}\cdot\phi(x)\,dx+\lim_{\zeta\to 0}\int_{2+\zeta}^{+\infty}\frac{1}{x-2}\cdot\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot 76$$

$$\tau(\phi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-2}\cdot\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot 77 \qquad (\text{存在しない})$$

式2･48と式2･49の方法で超関数を定義するので、式2･8、式2･4の関数f(x)をそのままで超関数と見なすことはできない。発散点を含む関数は超関数と見なせない。

(5)　超関数が関数と等しい区間

[定義]

区間a＜x＜bの外で関数値が0であり、区間-∞＜x＜+∞で無限回微分可能な急減少関数ϕ(x)を用いて、超関数g(x)と区間a＜x＜bで定義された関数f(x)が式2･78を満足するとき、区間a＜x＜bで超関数g(x)が関数f(x)と等しいと言い、式2･79と書く。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,\phi(x)\,dx=\int_{a}^{b}f(x)\,\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot 78$$

$$(\text{超関数})\,g(x)=(\text{関数})\,f(x) \qquad (a<x<b) \qquad 2\cdot 79$$

区間-∞＜x＜+∞で定義されていた超関数g(x)について、式2･78、式2･79により、区間a＜x＜bにおける状況が説明できることになる。区間の端点はa＝-∞、b＝+∞としても構わない。区間a＜x＜bの各点において超関数g(x)の近似関数G(x)が式2･80を満足する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}G(x)=g(x) \qquad (a<x<b) \qquad 2\cdot 80$$

式2･80は式2･53と類似の状況である。

[関数ϕ(x)の存在]

式2･78、式2･79の定義を用いるためには、区間a＜x＜bの外で関数値が0であり、区間-∞＜x＜+∞で無限回微分可能な急減少関数ϕ(x)が存在しなくてはならない。区間-∞＜x≦aと区間b≦x＜+∞で関数ϕ(x)が関数値0の定数関数とすると、この区間では無限回微分可能であり、導関数の全てが関数値0の定数関数である。区間a＜x＜bにおいて関数ϕ(x)が0

でない値をとって変動し、しかも、点x＝a、点x＝bにおいては式2･81、式2･82が成り立たなければならない。

$$\phi(a)=\phi'(a)=\phi''(a)=\cdots=\phi^{(n)}(a)=\cdots=0 \qquad 2\cdot81$$

$$\phi(b)=\phi'(b)=\phi''(b)=\cdots=\phi^{(n)}(b)=\cdots=0 \qquad 2\cdot82$$

［左半分0の急減少関数］

区間a＜x＜bの外で関数値が0であり、区間-∞＜x＜+∞で無限回微分可能な急減少関数$\phi(x)$について考えるために、式2･83の関数$\phi(x)$を考える。式2･83の関数$\phi(x)$は表2=3に数値計算され、図2-9に図示される。

$$\phi(x)=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad 2\cdot83$$

表2=3　式2･83の関数$\phi(x)$

x	(0)	0.5	0.7	1	2	3	4	5	(+∞)
$\phi(x)$	(0)	0.0183	0.130	0.367	0.779	0.895	0.939	0.961	(1)

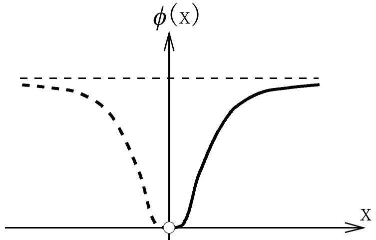

図2-9　式(159)の関数$\phi(x)$

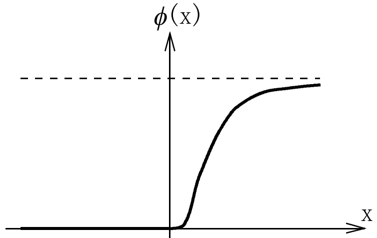

図2-10　区間x≦0が0の関数

点x＝0については式2･83から直接は計算されないので点x＝0は不定義点であり、図2-9には白丸○で表示している。表2=3のx＝0とx＝+∞についての括弧()書は式2･84と式2･85の極限を意味している。

$$\lim_{x\to0}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0 \qquad 2\cdot84$$

$$\lim_{x\to+\infty}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1 \qquad 2\cdot85$$

式2･83の関数$\phi(x)$と関数値0の定数関数を組み合わせると式2･86、式2･87が得られ、図2-10に図示される。

$$\phi(x)=0 \qquad (x\leqq0) \qquad 2\cdot86$$

$$\phi(x)=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad (0<x) \qquad 2\cdot87$$

区間0＜xで、式2･87の関数$\phi(x)$の導関数は式2･88、式2･89、式2･90、・・・のようになる。

$$\phi'(x)=\frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad 2\cdot88$$

$$\phi''(x)=\left(\frac{-6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad 2\cdot89$$

$$\phi'''(x)=\left(\frac{24}{x^5}-\frac{36}{x^7}+\frac{8}{x^9}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad 2\cdot90$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$\frac{1}{x^2}$＝tとおくと、x→0のとき、t→+∞となるから式2･91が成り立つ。

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{2n}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^n}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{\exp(t)}=0 \qquad 2\cdot91$$

x→0の極限を考えるから0＜x＜1として良く、$1<\frac{1}{x}$として良いから、式2･92の不等式が成り立つ。

$$0<\frac{1}{x^{2n-1}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x^{2n-1}}\right)}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}\leqq\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^{2n-1}}\right)}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\frac{1}{x^{2n}}}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^n}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)} \qquad 2\cdot92$$

式2･92の第6辺が式2･91のように0に収束するから、式2･93が得られる。

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{2n-1}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0 \qquad 2\cdot93$$

式2･91、式2･93を式2･88、式2･89、式2･90・・・に代入し、式2･84と組

み合わせると、式2·94が得られる。

$$\lim_{x\to0}\phi(x)=\lim_{x\to0}\phi'(x)=\lim_{x\to0}\phi''(x)=\cdots=\lim_{x\to0}\phi^{(n)}(x)=\cdots=0 \qquad 2\cdot94$$

式2·86、式2·87の関数$\phi(x)$は、区間$-\infty<x\leqq0$で関数値が0であり、区間$-\infty<x<+\infty$で定義され、式2·94が成り立つから、点$x=0$においても、無限回微分可能である。式2·86、式2·87の関数$\phi(x)$は、式2·85が成り立つから緩増加関数である。

［テイラー展開についての注意］

式2·86、式2·87の関数$\phi(x)$は、点$x=0$において無限回微分可能であるにも拘わらず、テイラー展開可能でないので注意が必要である。点$x=0$の周りでテイラー展開すると区間$0\leqq x$において関数値0の定数関数になってしまい、区間$0\leqq x$における関数の状況を正しく表示することができない。

［横移動］

図2-10の関数を横へaだけ移動すると式2·95、式2·96の関数$\phi(x)$が得られ、図2-11に図示される。

$$\phi(x)=0 \qquad (-\infty<x\leqq a) \qquad 2\cdot95$$

$$\phi(x)=\exp\left(-\frac{1}{(x-a)^2}\right) \qquad (a<x<+\infty) \qquad 2\cdot96$$

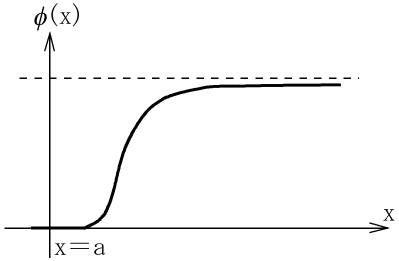

図2-11　横へaだけ移動

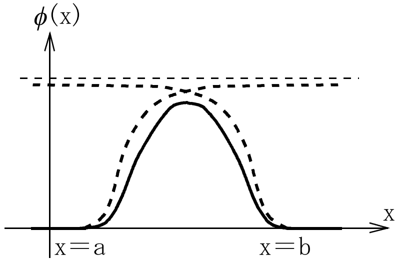

図2-12 区間$a<x<b$の外で0の関数

図2-9に点線で図示した区間を用いて式2·97、式2·98が得られる。

$$\phi(x)=\exp\left(-\frac{1}{(x-b)^2}\right) \qquad (-\infty<x<b) \qquad 2\cdot97$$

$$\phi(x)=0 \qquad (b\leqq x<+\infty) \qquad 2\cdot98$$

［区間$a<x<b$の外で0の関数］

式2·95、式2·96の関数と式2·97、式2·98の関数の積は式2·99、式2·100で表され、図2-12に図示される。

$$\phi(x)=0 \qquad (x\leqq a,\ b\leqq x) \qquad 2\cdot99$$

$$\phi(x)=\exp\left(-\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{1}{(x-b)^2}\right) \qquad (a<x<b) \qquad 2\cdot100$$

式2·99、式2·100の関数$\phi(x)$は区間$a<x<b$の外で関数値が0である無限回微分可能関数である。式2·99、式2·100の関数$\phi(x)$と式2·47の関数$g(x)$の積は、区間$a<x<b$の外で関数値が0であり、区間$-\infty<x<+\infty$で無限回微分可能である。係数a_n、a_{n-1}、・・・、a_1、a_0を変化させると、関数を任意に変化させることができるから、式2·78、式2·79の関数$\phi(x)$として用いることができる。

［例］

式2·54の関数$f(x)$はそのままで、式2·55の汎関数$\tau(\phi)$を介して式2·48で定義される超関数$f(x)$と見なす(38頁参照)ことができる。

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1 \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad 2\cdot54(再掲)$$

式2·78、式2·79の区間$a<x<b$において、$a=-\infty$、$b=+\infty$とした場合に相当する。

［例］

ディラック関数の区間$0<x<+\infty$状況を調べるために、区間$-\infty<x\leqq0$で関数値が0である急減少関数$\phi(x)$を用いる。式2·86、式2·87の関$\phi(x)$と式2·13の関数$f(x)$を掛け算すると、式2·86、式2·101の関数$\phi(x)$が得られ、区間$-\infty<x\leqq0$で関数値が0の急減少関数である。

$$\phi(x)=0 \qquad (x\leqq0) \qquad 2\cdot86(再掲)$$

$$\phi(x)=\exp(-x^2)\cdot\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\exp\left(-x^2-\frac{1}{x^2}\right) \qquad (0<x<+\infty) \qquad 2\cdot101$$

区間$-\infty<x\leqq0$で関数値が0の急減少関数は無数に多く存在し、式2·86、式2·101はその1つである。ディラック関数$\delta(x)$は式2·58、式2·60から式2·102を満足する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\phi(x)\,dx=\phi(0) \qquad 2\cdot102$$

区間-∞＜x≦0で関数値が0の急減少関数$\phi(x)$は、式2･103が成り立つから式2･102に代入して式2･104が得られる。

$$\phi(0)=0 \qquad 2\cdot103$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\phi(x)\,dx=0 \qquad 2\cdot104$$

区間-∞＜x≦0で関数値が0の急減少関数$\phi(x)$は、式2･105が成り立つから、式2･104と式2･105を用いて式2･106のように計算され、式2･107が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{0}\delta(x)\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}\delta(x)\cdot 0\,dx=0 \qquad 2\cdot105$$

$$\int_{0}^{+\infty}\delta(x)\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\phi(x)\,dx-\int_{-\infty}^{0}\delta(x)\phi(x)\,dx=0-0=0 \qquad 2\cdot106$$

$$\int_{0}^{+\infty}\delta(x)\phi(x)\,dx=0 \qquad 2\cdot107$$

区間0＜x＜+∞では入力要素$\phi(x)$が任意に変動するから、式2･107が成り立つためには、式2･108が成り立たなければならない。

$$\delta(x)=0 \qquad (0<x<+\infty) \qquad 2\cdot108$$

同じように、区間0≦x＜+∞で関数値が0である急減少関数$\phi(x)$を用いると、式2･109が成り立つ。

$$\delta(x)=0 \qquad (-\infty<x<0) \qquad 2\cdot109$$

式2･108、式2･109により、ディラック関数$\delta(x)$の区間x≠0における状況が説明された。

[例]

　ヘビサイド関数$\eta(x)$は式2･70、2･72から式2･110を満足する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(x)\phi(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot110$$

区間-∞＜x≦0で関数値が0である急減少関数$\phi(x)$は、式2･111が成り立つから、式2･110と式2･111を用いて式2･112のように計算され、式2･113

が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{0}\eta(x)\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}\eta(x)\cdot 0\,dx=0 \qquad 2\cdot111$$

$$\int_{0}^{+\infty}\eta(x)\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(x)\phi(x)\,dx-\int_{-\infty}^{0}\eta(x)\phi(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\phi(x)\,dx-0=\int_{0}^{+\infty}\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot112$$

$$\int_{0}^{+\infty}\eta(x)\phi(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\phi(x)\,dx \qquad 2\cdot113$$

区間0＜x＜+∞では入力要素$\phi(x)$が任意に変動するから、式2･113が成り立つためには、式2･114が成り立たなければならない。

$$\eta(x)=1 \qquad (0<x<+\infty) \qquad 2\cdot114$$

区間0≦x＜+∞で関数値が0である急減少関数$\phi(x)$は、式2･115､式2･116が成り立つから、式2･115､式2･116を用いて式2･117のように計算され、式2･118が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(x)\phi(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\phi(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}0\,dx=0 \qquad 2\cdot115$$

$$\int_{0}^{+\infty}\eta(x)\phi(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\eta(x)\cdot 0\,dx=0 \qquad 2\cdot116$$

$$\int_{-\infty}^{0}\eta(x)\phi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(x)\phi(x)\,dx-\int_{0}^{+\infty}\eta(x)\phi(x)\,dx=0-0=0 \qquad 2\cdot117$$

$$\int_{-\infty}^{0}\eta(x)\phi(x)\,dx=0 \qquad 2\cdot118$$

区間-∞＜x＜0では入力要素$\phi(x)$が任意に変動するから、式2･118が成り立つためには、式2･119が成り立たなければならない。

$$\eta(x)=0 \qquad (-\infty<x<0) \qquad 2\cdot119$$

式2･114、式2･119により、ヘビサイド関数$\eta(x)$の区間x≠0における状況が説明された。

[式2･78、式2･79の方法の限界]

　超関数に比べて関数の方が早くから考察され、良く知られている。式

2・78、式2・79は超関数g(x)と関数f(x)が等しいことを定義しており、区間a＜x＜bの各点について超関数g(x)を関数f(x)を介して説明する。超関数g(x)を理解するために、区間a＜x＜bをなるべく広く選びたいが、区間a＜x＜bに特異点を含めることはできない。式2・78、式2・79の方法が超関数g(x)について説明することに限界があり、特異点については説明できない。ディラック関数δ(x)の区間x≠0における状況は式2・108、式2・109によって説明されるが、点x＝0における状況は説明されていない。ディラック関数δ(x)の性質は母汎関数$\gamma(\phi)$によって説明されるから、点x＝0における状況も母汎関数$\gamma(\phi)$によって間接的に説明されるはずである。しかし、式2・108、式2・109の説明が独立変数xと従属変数δ(x)の対応として理解されるのに対し、母汎関数$\gamma(\phi)$による説明は入力関数ϕ(x)と出力数値$\gamma(\phi)$の対応として理解され、異質であることを注意すべきである。ヘビサイド関数η(x)の区間0＜x＜+∞における状況は式2・114によって説明され、区間-∞＜x＜0における状況は式2・119によって説明されるが、点x＝0における状況は説明されていない。ヘビサイド関数η(x)の性質は母汎関数$\iota(\phi)$によって説明されるから、点x＝0における状況も母汎関数$\iota(\phi)$によって間接的に説明されるはずである。しかし、式2・119、式2・114の説明が独立変数xと従属変数η(x)の対応として理解されるのに対し、母汎関数$\iota(\phi)$による説明は入力関数ϕ(x)と出力数値$\iota(\phi)$の対応として理解され、異質であることを注意すべきである。

(6)　超関数の演算

[和]

近似関数F(x)が超関数f(x)を定義し、近似関数G(x)が超関数g(x)を定義するとき、近似関数の和{F(x)+G(x)}が超関数の和{f(x)+g(x)}を定義すると言う。式2・120の第1辺と第4辺の関係が式2・50と同形である。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\{F(x)+G(x)\}\phi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\phi(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)\phi(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\phi(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\{f(x)+g(x)\}\phi(x)dx \qquad 2\cdot 120$$

式2・120では汎関数の入力要素ϕ(x)を用いている。関数の和と積分については式2・120の第1辺から第2辺へ変形できる。

[積]

近似関数F(x)が超関数f(x)を定義するとき、緩増加関数ψ(x)と近似関数F(x)の積が緩増加関数ψ(x)と超関数f(x)の積を定義すると言う。式2・121の第1辺と第4辺の関係が式2・50と同形である。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\psi(x)F(x)\}\phi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\{\psi(x)\phi(x)\}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\{\psi(x)\phi(x)\}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\psi(x)f(x)\}\phi(x)dx \qquad 2\cdot 121$$

式2・121では汎関数の入力要素ϕ(x)を用いている。関数の積については式2・121の第1辺から第2辺へ変形できる。式2・121の第2辺から第3辺への変形は積{ψ(x)ϕ(x)}を汎関数の入力要素と考えて式2・50を適用している。

[例]

関数xと超関数δ(x)の積x・δ(x)について式2・122のように計算される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{x\cdot\delta(x)\}\cdot\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\cdot\{x\cdot\phi(x)\}dx=0\cdot\phi(0)=0 \qquad 2\cdot 122$$

式2・122の第1辺と第4辺を見比べると、関数ϕ(x)が任意に変動するから、式2・123が成り立つ。

$$x\cdot\delta(x)=0 \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad 2\cdot 123$$

式2・123は積x・δ(x)について説明している。

[例]

式2・123の両辺を微分すると式2・124が成り立つ。

$$\{x\cdot\delta(x)\}'=x'\cdot\delta(x)+x\cdot\delta'(x)=\delta(x)+x\cdot\delta'(x)=0$$

$$x\cdot\delta'(x)=-\delta(x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad 2\cdot 124$$

式2・124は積x・δ'(x)について説明している。

[定数倍]

関数ψ(x)が数値cの定数関数である場合を考えると、超関数f(x)の定数倍c・f(x)を定義することができる。

［差］

超関数g(x)を-1倍し、超関数f(x)との和を計算すると、差f(x)-g(x)を定義することができる。

「導関数」

近似関数F(x)が超関数f(x)を定義するとき、近似関数の導関数F'(x)が超関数f(x)の導関数f'(x)を定義すると言う。積{F(x)ϕ(x)}を微分すると式2･125が得られる。

$$\{F(x)\phi(x)\}'=F(x)'\phi(x)+F(x)\phi(x)'$$
$$F(x)'\phi(x)=-F(x)\phi(x)'+\{F(x)\phi(x)\}' \qquad 2\cdot 125$$

式2･125の両辺を積分すると、

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}F'(x)\phi(x)\,dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\phi(x)'\,dx+[F(x)\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\phi(x)'\,dx \qquad 2\cdot 126$$

式2･126でϕ(x)が急減少関数だから、式2･127が成り立ち、式2･126の第2辺で式2･127を用いている。

$$\phi(-\infty)=\phi(+\infty)=0 \qquad 2\cdot 127$$

式2･126を式2･128のように書く。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\phi(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\phi(x)'\,dx \qquad 2\cdot 128$$

式2･128は超関数f(x)の微分を入力要素ϕ(x)の微分に置き換えて考察できることを示している。超関数f(x)が微分可能なためには近似関数F(x)が微分可能であるだけでなく、入力要素ϕ(x)も微分可能でなければならない。

［例］

ヘビサイド関数η(x)を式2･128のf(x)に代入すると、式2･129が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\eta'(x)\phi(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(x)\phi'(x)\,dx=-\int_{0}^{+\infty}\phi'(x)\,dx$$
$$=-[\phi(x)]_{0}^{+\infty}=-\{0-\phi(0)\}=\phi(0) \qquad 2\cdot 129$$

式2･129と式2･60、式2･58を比べると式2･130が得られる。

$$\eta'(x)=\delta(x) \qquad 2\cdot 130$$

(7)　分布と汎関数型の超関数

［超関数の萌芽］

補助変数εと独立変数xを含む式2･61の関数Δ(x)は図2-7のように図示(39頁参照)される。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{2}\right) \qquad 2\cdot 61(再掲)$$

x→-∞とx→+∞でx軸に漸近し、点x＝0に頂点を持つ山の形をしている。曲線とx軸で囲まれた面積は式2･131で表され、補助変数εの値に関係なく1である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,dx=1 \qquad 2\cdot 131$$

ε→0に伴って山は高くやせ型になり、曲線の山の頂点以外の部分が漸近線に近づく。厳密な議論をせずにε →0のとき、Δ(x)→δ (x)と考える。式2･131で表される大きさ1の量が点x＝0に集中して分布している現象を表すのに関数δ(x)を用いると便利であると考えられ、物理学や工学で使われるようになった。このことは西暦1900年以前から知られていたらしい。後に、関数δ(x)はディラック関数と呼ばれるようになる。式2･44、式2･45の関数Δ(x)も大きさ1の量が点x＝0に集中して分布している現象を表すのに用いられた。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon} \qquad (0<x<\varepsilon) \qquad 2\cdot 44(再掲)$$
$$\Delta(x)=0 \qquad (-\infty<x<0、\varepsilon<x<+\infty) \qquad 2\cdot 45(再掲)$$

式2･61の関数Δ(x)も式2･44、式2･45の関数Δ(x)も、ε→0のとき、点x＝0における関数値Δ(0)が収束せず、関数δ(x)は厳密な意味では関数ではない。式2･61の関数Δ(x)は微分可能であるが、式2･44、式2･45の関数Δ(x)は微分不能である。ディラック関数δ(x)は、大きさ1の量が点x＝0に集中して分布している現象を表すのに用いると便利であると考え

られた歴史があり、超関数は分布を表すと考えられている。
[同等な近似関数の判別]
近似関数Δ(x)について式2･132は成り立たないが、式2･69が成り立つことから、式2･69の収束に基づいて厳密な理論が組み立てられた。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Delta(x) = \delta(x) \qquad 2\cdot132 \qquad (不成立)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Gamma(\phi) = \gamma(\phi) \qquad 2\cdot69(再掲)$$

1945年頃にフランスのシュバルツが書いた教科書に集大成されており、日本語訳[14]もある。必ずしもシュバルツが独創した理論という訳ではないが、集大成した功績は大きい。その理論は「シュバルツの超関数」と呼ばれることが多いが、この本においては、理論構成の特徴を捉えて「汎関数型の超関数」と呼ぶことにした。1958年にイギリスのライトヒルが書いた教科書にわかり易く記述されており、日本語訳[9]もある。大きさ1の量が点x＝0に集中して分布している現象を表すために、多くの近似関数Δ(x)を用いることができるが、近似関数Δ(x)の共通の性質が式2･68、式2･69である。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x)\,\phi(x)\,dx = \Gamma(\phi) \qquad 2\cdot68(再掲)$$

式2･68の関数Δ(x)が近似関数であることを式2･69によって判別する。
[関数が分布を表す]
分布は分布の場から分布する量への対応であるから、分布を記述するためには分布の場と分布する量を明示する必要がある。荷重の分布を考察する場合には材軸線が分布の場であり、荷重が分布する量である。材軸線に沿って座標を設定すると、各点は座標の数値で表わされる。各点に分布する荷重は数値で表わされる。各点の座標を独立変数xとし、荷重を従属変数yとすると、関数が得られ、関数が荷重の分布を表現する。独立変数xが材軸線の各点を表すから、定義域が材軸線に相当する。分布を数学的に表現するために関数を用いるのが自然である。空間に分布する量を扱う場合が多いと思われる。３次元空間の各点は直交座標(x､y､z)で表すことができ、各座標は原点から座標軸に沿って測った距離である。分布の場を１次元空間として把握できる場合には座標xだけで表される。

時系列変化の現象を扱う場合も、時間を分布の場とする分布と考えることができる。分布と関数の対応を表2=4に示す。独立変数が分布の場を構成する各点に相当し、従属変数が分布する量に相当し、定義域が分布の場に相当する。

表2=4　分布と関数

分布	分布の場を構成する各点	分布する量	分布の場
関数	独立変数　x	従属変数　y	定義域

[汎関数は分布を表さない]
式2･69の収束に基づいて超関数が定義されることから、超関数δ(x)は母汎関数$\gamma(\phi)$のことであると説明される場合がある。超関数δ(x)と母汎関数$\gamma(\phi)$が1対1に対応するから、純粋数学としては理解できる説明ではあるが、超関数δ(x)が分布を表すとの立場からは理解できない説明である。超関数δ(x)が独立変数xと従属変数δ(x)の対応と理解されるのに対し、母汎関数$\gamma(\phi)$は入力要素ϕと出力要素$\gamma(\phi)$の対応と理解され、異質である。分布の場や分布する量を入力要素ϕと出力要素$\gamma(\phi)$が表す訳ではない。独立変数xから従属変数δ(x)への対応と理解しなければ、分布と関係づけることはできない。
[広義積分を用いる場合]
図2-1の関数f(x)は点x＝2が不定義であるが、式2･1の型の広義積分を用いると、式2･49の汎関数$\tau(\phi)$が存在するので、図2-1の関数f(x)をそのままで超関数と見なすと、説明される場合がある。式2･49の右辺の積分区間が点x＝2を明示的に除外しないので、点x＝2も超関数f(x)の定義域に含まれると推測されるが、超関数f(x)の点x＝2における状況について特段の説明がない。図2-1の関数f(x)は点x＝2について明示的に定義域外と説明している。
[発散点における分布の説明]
式2･76の広義積分の補助変数について、式2･133を仮定すると広義積分が収束し、主値と呼ばれる。

$$\varepsilon = \zeta \qquad 2\cdot133$$

主値を用いると式2･77の汎関数$\tau(\phi)$が存在するので、式2･8の関数f(x)

をそのままで超関数と見なすと、説明される場合がある。超関数が分布を表すとの立場からは理解できない説明である。分布の場を独立変数xで表し、分布する量を従属変数f(x)で表す。式2･77の右辺の積分区間が点x＝2を明示的に除外しないので、点x＝2も超関数の定義域に含まれると推測される。式2･77の汎関数$\tau(\phi)$を母汎関数とする超関数f(x)は点x＝2における分布の状態を全く説明しない。式2･8、式2･4の関数f(x)は発散点x＝2について明示的に定義域外と説明している。

[ディラック関数の特異点における分布の説明]

式2･108、式2･109を書き換えると、式2･134が得られる。式2･134によりディラック関数$\delta(x)$の区間x≠0における状況が説明されたが、点x＝0における状況は説明されない。

$$\delta(x)=0 \qquad (x\neq 0) \qquad 2\cdot134$$

式2･61の近似関数$\Delta(x)$から式2･135が得られることから、式2･136と説明される場合がある。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad 2\cdot61(再掲)$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta(0)=+\infty \qquad 2\cdot135$$

$$\delta(0)=+\infty \qquad 2\cdot136$$

式2･61の$\Delta(x)$は近似関数の1つにすぎず、同等な他の式2･137の近似関数$\Delta(x)$から式2･138が得られ、式2･136は成り立たない。

$$\Delta(x)=\frac{2x^2}{\varepsilon^2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad 2\cdot137$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta(0)=0 \qquad 2\cdot138$$

ディラック関数$\delta(x)$の点x＝0における状況を式2･136と説明するのは誤解を招き易い。

第3章　集中力とディラック関数の比較

(1)　多段階推論

[自明ではない]

ディラック関数$\delta(x)$は、大きさ1の量が点x＝0に集中して分布している現象を表すのに便利であると考えられた歴史があり、ディラック関数$\delta(x)$を用いて集中力を表すことができると言われている。詳しい説明は無いが、説明を要しないほど自明ではないと思われる。点x＝cに置かれた大きさPの集中力f(x)は図1-7、図1-8、式1･18、式1･19、式1･20、式1･21、式1･22で(8頁参照)考察したが、式1･34の型(15頁参照)の関数配列で表せば、式3･1、式3･2で表される。

$$f(x)=(0,0,0,0) \qquad (0\leqq x<c、c<x\leqq \ell) \qquad 3\cdot1$$

$$f(x)=(0,0,P,0) \qquad (x=c) \qquad 3\cdot2$$

点x＝0に置かれた大きさ1の集中力$\lambda(x)$は式3･3、式3･4で表される。

$$\lambda(x)=(0,0,0,0) \qquad (0<x\leqq \ell) \qquad 3\cdot3$$

$$\lambda(x)=(0,0,1,0) \qquad (x=0) \qquad 3\cdot4$$

式3･1、式3･2でc＝0、P＝1とおけば式3･3、式3･4が得られる。式3･3、式3･4の$\lambda(x)$の点x＝0の点半径νと点x＝ℓの点半径βを用いて、式1･18、式1･19、式1･20を式3･5、式3･6、式3･7のように書き換えると、眺望関数$\lambda(x)$に対応する凝視関数$\Lambda(x)$が得られる。

$$\Lambda(x)=0 \qquad (+\nu\leqq x\leqq \ell+\beta) \qquad 3\cdot5$$

$$\int_{-\nu}^{+\nu}\Lambda(x)\,dx=\lambda_1(0)=1 \qquad 3\cdot6$$

$$\int_{-\nu}^{+\nu}\Lambda(x)\,x\,dx=0 \qquad 3\cdot7$$

式2･58、式2･59でディラック関数$\delta(x)$について考察した。

$$\gamma(\phi)=\phi(0) \qquad 2\cdot58(再掲)$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\,\phi(x)\,dx=\gamma(\phi) \qquad 2\cdot59(再掲)$$