第1章　荷重の分布の表現

(1)　３種類の荷重

構造物には分布荷重、集中荷重、集中モーメントの３種類の荷重が作

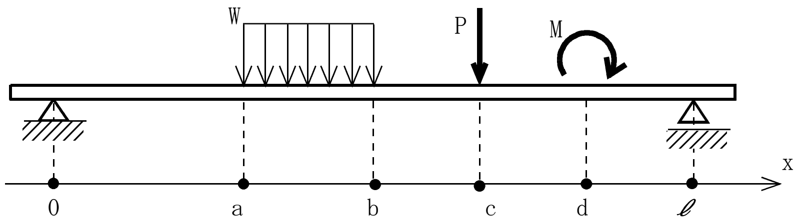

図1-1　３種類の荷重

用する。図1-1は長さℓの単純梁であり、単純梁を材軸線が代表する。荷重は材軸線の各点に分布するから、材軸線に沿って設定された座標xを独立変数とする関数で、荷重を表現するのが自然である。材軸線の各点の荷重の状態は１つである。材軸線に沿って座標xを設定し、左端x＝0､右端x＝ℓとする。点x＝aから点x＝bまでに大きさWの等分布荷重が作用し、点x＝cに集中荷重Pが作用し、点x＝dに集中モーメントMが作用している。

分布荷重Wは単位がN/mであり、構造力学では図1-1に示すように平行な多くの細い矢印で表される。集中荷重Pは単位がNであり、太い矢印で表され、集中モーメントMは単位がNmであり、太い弧矢印で表される。荷重を関数で表す場合、図1-1の単純梁は２つの支点の間が考察対象であるから、区間0≦x≦ℓが定義域である。荷重を関数で表すのが自然ではあるが、種類の異なる荷重が作用するから、単一の関数で表すことはできない。種類の異なる荷重を成分に分けて別々の関数として表示し、荷重としての共通の性質を考察する必要がある。

(2)　分布荷重

［例］

図1-1の分布荷重の例として図1-2の上段のような直方体ABCDの塊によ

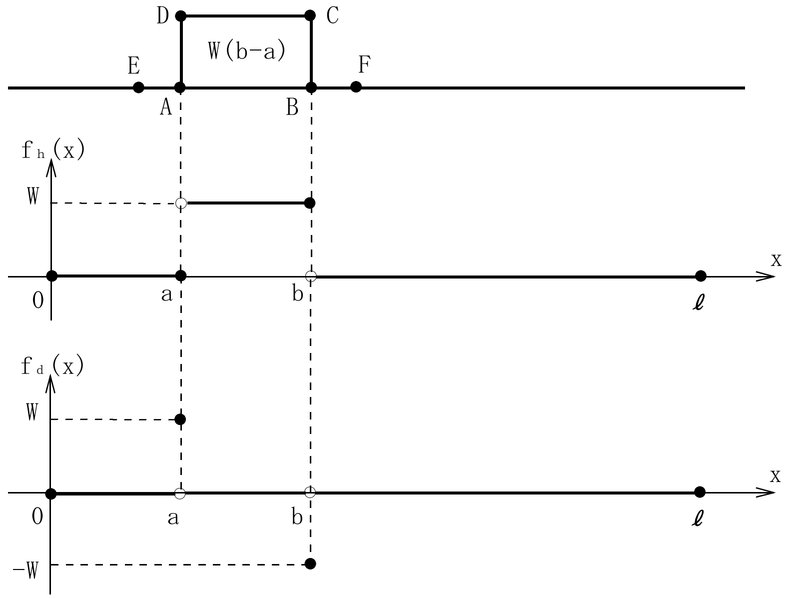

図1-2 全景眺望による直方体の塊

る荷重を想定する。路面EFに沿って座標xを設定する。議論を単純にするために、路面幅と直方体の塊の幅を同じにし、路面に沿って座標x＝aの点Aから座標x＝bの点Bまでを直方体の長さとする。直方体の重量W(b-a)が路面に荷重として作用する。

［成分表示］

区間0≦x＜aや区間a＜x＜bや区間b＜x≦ℓにおいて分布荷重を連続関数で表すことができるが、点x＝aにおいては関数値が急増し、点x＝bにおいては関数値が急減しており、普通の関数で表すことはできない。分布荷重$f_o(x)$を式1･1､式1･2の左連続成分$f_h(x)$と式1･3､式1･4､式1･5の段差成分$f_d(x)$に分けて表すことにする。

$f_h(x)=0$	(0≦x≦a、b＜x≦ℓ)	1･1
$f_h(x)=W$	(a＜x≦b)	1･2
$f_d(x)=0$	(0≦x＜a、a＜x＜b、b＜x≦ℓ)	1･3
$f_d(x)=W$	(x＝a)	1･4

$f_d(x)=-W \qquad (x=b) \qquad 1\cdot5$

関数$f_h(x)$と関数$f_d(x)$の定義域は区間$0\leqq x\leqq \ell$である。左連続成分$f_h(x)$と段差成分$f_d(x)$の単位はN/mで同じである。左連続成分$f_h(x)$は図1-2の中段のように図示され、段差成分$f_d(x)$は図1-2の下段のように図示される。点x＝bにおいては段差成分$f_d(x)$の負の数値によって急減を表現している。分布荷重$f_o(x)$は左連続成分$f_h(x)$と段差成分$f_d(x)$を組にしたものであり、式1･6のように点,で区切り、括弧{}で包んで数ベクトルと同じ形式で表すことが考えられる。

$f_o(x)=\{f_h(x), f_d(x)\} \qquad 1\cdot6$

ベクトルと同じ形式で表すのであれば、数値1と記号↑を基底ベクトルとして式1･7のように表すことが考えられる。

$f_o(x)=f_h(x)+f_d(x)\uparrow \qquad 1\cdot7$

記号↑を段差単位と呼ぶ。図1-2の中段の関数$f_h(x)$が点x＝a付近で急増して段差になる状況を図案化し、増加の方向を矢印によって示して、記号↑を作成した。頭文字の「ダ」や「d」などを段差単位の記号として用いても良いが、この本は↑を採用する。左連続成分$f_h(x)$と段差成分$f_d(x)$は単位がN/mで同じであるが、性質の異なる量であり、別の成分として表示される。

[一義的に決まらない点]

分布荷重$f_o(x)$を式1･6や式1･7のように表すのは、関数$f_o(x)$の従属変数を一義的に決定するするためである。普通の関数$f_z(x)$で分布荷重を表そうとすれば、区間$0\leqq x<a$、区間$a<x<b$、区間$b<x\leqq \ell$については、式1･8､式1･9のように表すことができるが、点x＝aと点x＝bにおいて関数値が不連続になるから、関数値$f_z(a)$、$f_z(b)$を一義的に決めることができない。関数は点x＝aと点x＝bにおいて段差になっている。

$f_z(x)=0 \qquad (0\leqq x<a,\ b<x\leqq \ell) \qquad 1\cdot8$

$f_z(x)=W \qquad (a<x<b) \qquad 1\cdot9$

$f_z(a)=0$､$f_z(b)=W$としても、$f_z(a)=W$､$f_z(b)=0$としても、$f_z(a)=\frac{W}{2}$、$f_z(b)=\frac{W}{2}$としても、点x＝aと点x＝bを関数の定義域外としても分布荷重の段差の状況を適切に表現することはできない。従来の構造力学の教科書[1)]においては図1-2の上段の直方体の分布荷重が式1･8と式1･9の関数で表現され、点x＝aと点x＝bの状況について言及を避けている。材軸線の各点の荷重の状態は１つであるから、独立変数の各値に対して従属変数の値を一義的に決める必要がある。式1･8と式1･9の関数値$f_z(a)$、$f_z(b)$を一義的に決めることができないとすれば、式1･6や式1･7のように関数の組で分布荷重$f_o(x)$を表示することによって、従属変数の値を一義的に決め、点x＝aと点x＝bの状況を十分に説明しなければならない。式1･3、式1･4、式1･5の段差成分$f_d(x)$は点x＝aにおける急増や点x＝bにける急減を表すための成分である。

[詳細凝視]

図1-2を見ながら近付いて、部分EFを拡大して詳細に見ると、図1-3の

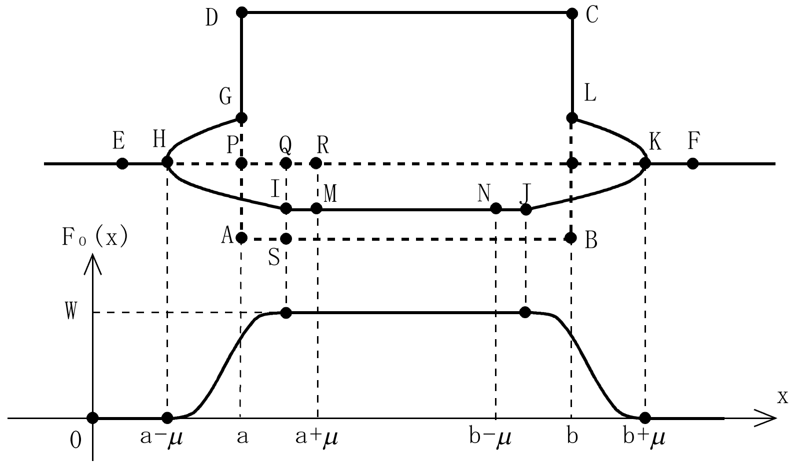

図1-3　詳細凝視による直方体の塊

上半のようになる。直方体の塊ABCDが変形してGHIJKLCDとなり、路面は直線EFが変形して曲線EHIJKFになり、曲線HIJKを介して直方体の塊の重量W(b-a)が路面に伝達されている。伝達される荷重$F_o(x)$の概形は図1-3

の下半のように図示される。関数$F_o(x)$の単位はN/mであり、関数$f_o(x)$の単位と同じである。点Aの付近が複雑に変形し、曲線HIの部分で滑らかに分布荷重$F_o(x)$が0からWまで増加する。図1-3においては長さHPが長さPQより長いので、長い方の長さHPをμとし、長さPRがμになる点Rをとり、直線HQの代わりに直線HRを考える。区間$a-\mu \leqq x \leqq a+\mu$が直線HRを表すから、図1-3の下半に図示するように区間$a-\mu \leqq x \leqq a+\mu$において分布荷重$F_o(x)$が0からWまで増加し、式1･10、式1･11が成り立つ。

$$f_h(a) = F_o(a-\mu) \qquad 1\cdot10$$

$$f_d(a) = F_o(a+\mu) - F_o(a-\mu) \qquad 1\cdot11$$

点Bの付近においても点Aの付近と同じように、分布荷重$F_o(x)$がWから0まで減少する。直方体や路面の材質が均一であれば、点Bの付近においても長さμを考えて良い。直線IJの部分は等分布荷重であるが、直線IJの代わりに直線MNを考え、関数$F_o(x)$を式1･12で表す。

$$F_o(x) = W \qquad (a+\mu \leqq x \leqq b-\mu) \qquad 1\cdot12$$

直方体の塊の全重量は区間$a-\mu \leqq x \leqq b+\mu$で伝達され、分布荷重$F_o(x)$の合力W(b－a)に一致するから、式1･13が成り立つ。

$$\int_{a-\mu}^{b+\mu} F_o(x)\,dx = \int_{a+0}^{b} f_h(x)\,dx = W(b-a) \qquad 1\cdot13$$

式1･13の中辺は式1･14の広義積分を意味している。

$$\int_{a+0}^{b} f_h(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f_h(x)\,dx \qquad 1\cdot14$$

分布荷重の左連続成分$f_h(x)$は点$x=a$において右側積分不能であり、広義積分を用いなければならない。正の数εとすると点$x=a+\varepsilon$は積分可能であり、式1･14の右辺は収束する。分布荷重の左連続成分$f_h(x)$は点$x=b$において左側積分可能である。関数$F_o(x)$は区間$a-\mu \leqq x \leqq b+\mu$で連続であり、積分可能である。

[同等な凝視関数]

図1-3の上半で路面と直方体の剛性が変わると曲線HIJKも変化する。ISが直方体の変形量、QIが路面の変形量、QSが合計の変形量である。直方体の剛性が大きく、路面の剛性が小さければ、ISが小さく、QIが大きい。

逆に、直方体の剛性が小さく、路面の剛性が大きければ、ISが大きく、QIが小さい。両者が共に大きければ、QSは小さく、逆に、両者が共に小さければ、QSは大きい。曲線HIJKが異なれば関数$F_o(x)$も異なり、関数$f_o(x)$が同じでも関数$F_o(x)$は異なる。関数$f_o(x)$と関数$F_o(x)$の対応は1対多である。異なる関数$F_o(x)$が同一の関数$f_o(x)$と対応するとき、異なる関数$F_o(x)$は互いに同等であると考える。

[全景眺望]

図1-3を見ながら遠ざかると、9点G、H、I、M、A、S、P、Q、Rがだんだん重なって区別がつかなくなり、図1-2の上段の点Aのように見えてくる。図1-2は広い範囲を遠くから眺めており、全景眺望の状態である。図1-3は各部を詳細に観察しており、詳細凝視の状態である。全景眺望と詳細凝視の違いを視点と呼び、２つの視点を操作することを視点移動と呼ぶ。分布荷重は関数$f_o(x)$と関数$F_o(x)$の対によって理解されるから、複視点関数と呼び、関数$f_o(x)$を眺望関数、関数$F_o(x)$を凝視関数と呼ぶ。視点移動により「図1-2の点$x=a$」と「図1-3の区間$a-\mu \leqq x \leqq a+\mu$」が対応するから、図1-2の点$x=a$を有域点と呼び、図1-3の区間$a-\mu \leqq x \leqq a+\mu$を点域と呼び、長さ$\mu$を点半径と呼ぶ。点半径$\mu$は非常に小さい正の数である。点半径$\mu$は凝視関数$F_o(x)$に付属しており、多くの同等な関数$F_o(x)$ごとに異なる点半径$\mu$が存在する。図1-2の点$x=b$も有域点である。直方体や路面の材質が均一であれば、図1-2の点$x=b$における点半径も点$x=a$と同じμである。有域点でない点を通常点と呼ぶ。

[定義域]

図1-1において部分載荷等分布荷重の端点$x=a$と$x=b$が有域点であるが、集中荷重の作用点$x=c$や集中モーメントの作用点$x=d$も有域点である。点$x=0$と$x=\ell$は支承であり、反力として上向きの集中力が発生する。反力の作用点$x=0$と$x=\ell$も有域点である。有域点$x=0$の点半径αとして点域$-\alpha \leqq x \leqq +\alpha$を考え、有域点$x=\ell$の点半径$\beta$として点域$\ell-\beta \leqq x \leqq \ell+\beta$を考えると、凝視関数$F_o(x)$の定義域は区間$-\alpha \leqq x \leqq \ell+\beta$であり、眺望関数$f_o(x)$の定義域の区間$0 \leqq x \leqq \ell$と対応する。図1-4に模式化した丸木橋を示す。丸木が両岸に支えられ、丸木橋と人の重さを両岸に伝えている。丸

木は図1-5のようにちょうど川幅でなく図1-4のように川幅より少し長い。

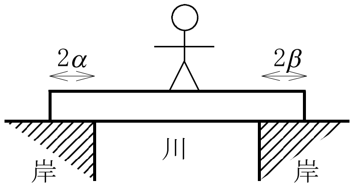

図1-4　可能な丸木橋

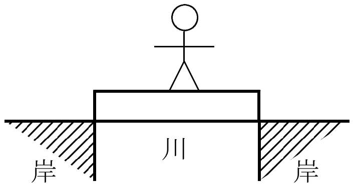

図1-5　不可能な丸木橋

丸木橋は丸木の太さ程度の長さが岸と重なっていないと、丸木橋と人の重さを両岸に伝えられない。左岸が丸木と長さ2αだけ重なり、右岸が丸木と長さ2βだけ重なっている。図1-4のαとβが支承における点半径である。図1-4と図1-5から支承が有域点であることが理解される。眺望関数$f_0(x)$の区間$0<x<\ell$は凝視関数$F_0(x)$の区間$+\alpha \leqq x \leqq \ell-\beta$と対応する。区間$a-\mu \leqq x \leqq b+\mu$の外では分布荷重は伝達されないから、式1･15が成り立つ。

$F_0(x)=0$　　　$(-\alpha \leqq x \leqq a-\mu、b+\mu \leqq x \leqq \ell+\beta)$　　　1･15

凝視関数$F_0(x)$は式1･12、式1･13、式1･15を満足する。

[段差のない分布]

図1-2、図1-3の荷重は端点AとBにおいて段差があるが、段差のない分

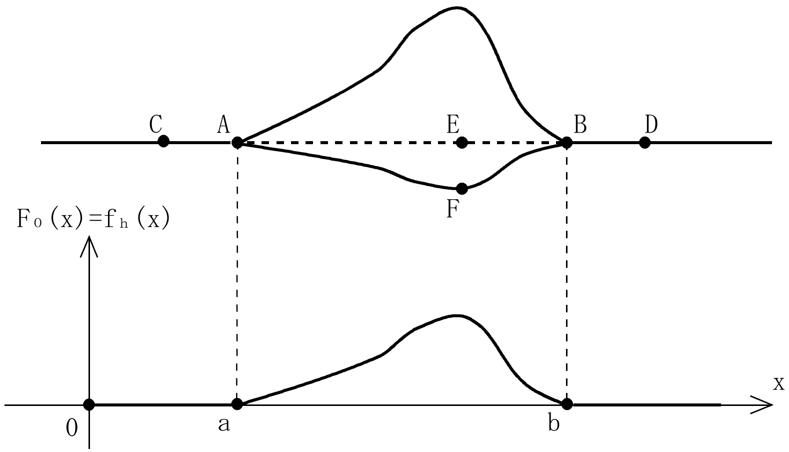

図1-6　段差のない分布荷重

布荷重についても考える。図1-6の上半は路面CDの点Aから点Bまでに砂を盛り上げた状況である。砂は粘性がないので点Aと点Bにおいても段差がなく連続している。路面CAEBDが変形して曲面CAFBDになり、曲面AFBを介して荷重が伝達されている。伝達される荷重の概形は図1-6の下段のように図示される。図1-6の分布荷重は有域点を持たず、定義域の全部において連続であり、式1･16が成り立つ。

$f_d(x)=0$　　　$(0 \leqq x \leqq \ell)$　　　1･16

図1-3の分布荷重も図1-6の分布荷重も通常点においては式1･17が成り立つ。

$F_0(x)=f_h(x)$　　　(xが通常点)　　　1･17

(3)　集中荷重

[例]

図1-1の集中荷重の例として図1-7の上半の自動車の輪荷重を想定する。

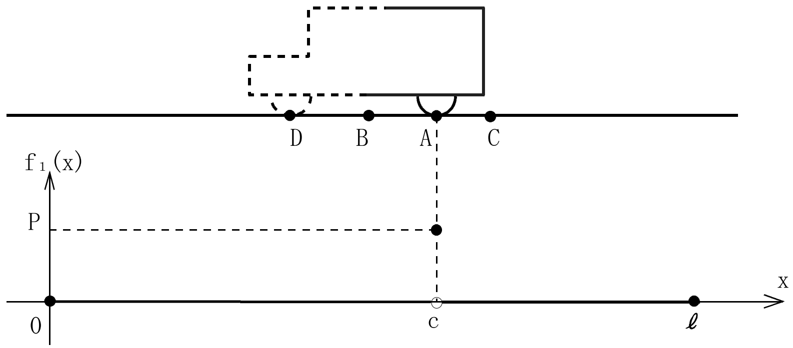

図1-7　全景眺望による輪荷重

後輪が点Aで路面BCと接している状況を考え、前輪Dを考えないことにする。車両重量の内の後輪が分担している荷重Pが車輪から路面に伝達される。路面BCに沿って座標xを設定し、点Aの座標を$x=c$とする。荷重を表示する関数$f_1(x)$とすると、図1-7の下半のように図示され、式1･18、式1･19で表される。

$f_1(x)=0$　　　$(0 \leqq x<c、c<x \leqq \ell)$　　　1･18

$f_1(x)=P$　　　　　$(x=c)$　　　　　　　　　1·19

関数$f_1(x)$の単位は荷重Pの単位と同じNである。関数$f_1(x)$は眺望関数であり、定義域は区間$0\leqq x\leqq \ell$である。

［詳細凝視］

図1-7を見ながら近付いて、部分BCを詳細に見ると、図1-8の上半のようになる。点Eを中心とする車輪は曲線FAGが変形して曲線FIGになり、路面は直線BCが変形して曲線BFIGCになり、曲線FIGを介して輪荷重が路面に伝えられている。車輪は直線AEに関して対称であるからFH＝HGであり、この長さをνとする。輪荷重は点域$c-\nu\leqq x\leqq c+\nu$に分布する力で、概形は図1-8の下半の関数$F_1(x)$のように図示される。関数$F_1(x)$の単位はN/mであり、関数$f_1(x)$と関数$F_1(x)$は単位が異なっている。関数$F_1(x)$は凝視関数であり、定義域は区間$-\alpha\leqq x\leqq \ell+\beta$である。点域$c-\nu\leqq x\leqq c+\nu$の外には分布力$F_1(x)$は分布しないので、式1·20が成り立つ。

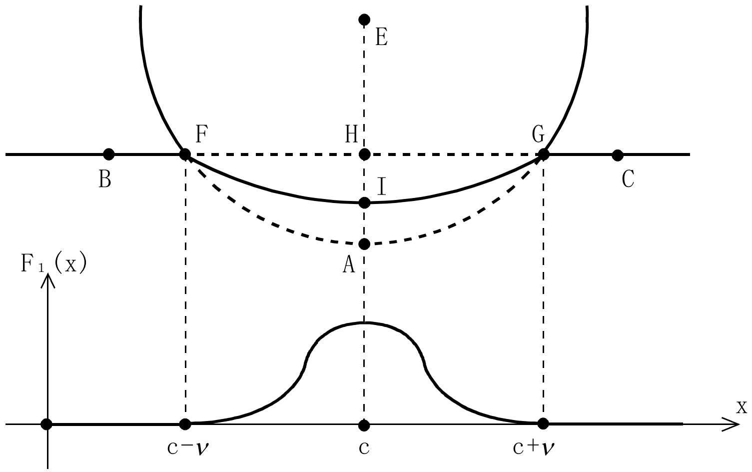

図1-8　詳細凝視による輪荷重

$F_1(x)=0$　　　　$(-\alpha\leqq x\leqq c-\nu、c+\nu\leqq x\leqq \ell+\beta)$　　　　1·20

分布力$F_1(x)$の合力は関数$f_1(x)$の点$x=c$における値Pと一致するから、式1·21が成り立つ。

$$\int_{c-\nu}^{c+\nu} F_1(x)\,dx=f_1(c)=P \qquad 1·21$$

分布力$F_1(x)$の点$x=c$の周りのモーメントは0であるから、式1·22が成り立つ。

$$\int_{c-\nu}^{c+\nu} F_1(x)(x-c)\,dx=0 \qquad 1·22$$

［同等な凝視関数］

図1-8の上半で路面と車輪の剛性が変わると曲線FIGも変化する。AIが車輪の変形量、HIが路面の変形量、AHが合計の変形量である。車輪の剛性が大きく路面の剛性が小さければ、AIは小さくHIは大きい。逆に車輪の剛性が小さく路面の剛性が大きければ、AIは大きくHIは小さい。両者が共に大きければAHは小さく、逆に共に小さければAHは大きい。曲線FIGが異なれば凝視関数$F_1(x)$も異なり、眺望関数$f_1(x)$が同じであっても凝視関数$F_1(x)$は異なる。眺望関数$f_1(x)$と凝視関数$F_1(x)$の対応は1対多である。異なる凝視関数$F_1(x)$が同一の眺望関数$f_1(x)$に対応するとき、異なる凝視関数$F_1(x)$は互いに同等であると考える。

［全景眺望］

図1-8を見ながら遠ざかると、5点A、F、G、H、Iがだんだん重なって区別がつかなくなり、図1-7上半の点Aのように見えてくる。視点移動により「図1-7の点$x=c$」と「図1-8の区間$c-\nu\leqq x\leqq c+\nu$」が対応するから、図1-7の点$x=c$は有域点である。有域点の点半径νの大きさの目安について考える。アスファルト舗装の駐車場に駐車した小型乗用車の後輪について、車輪とアスファルトの間に車輪の前後から薄い紙を差し込み、紙を平行にしてその間隔を測定したところ、11cmであった。タイヤの直径は54cmである。小型乗用車は前輪駆動で長さ約3.7m、幅約1.6m、高さ約1.5mである。空車時の重量が約1000kgで、前輪と後輪の荷重分担率が約6:4であるから、後輪1個の荷重は約200kgである。タイヤの直径54cmに対して点域半径νは5.5cm程度である。5.5cm程度であれば特殊な装置を用いることなく、目視で大きさを認識できる。点半径の長さ5.5cm程度を、捨象して点と考えるか捨象しないで有限の長さと考えるかは、観察者の

主観による。視点移動は、観察者と観察対象の距離の変化だけでなく、観察者の主観の変化を交えた判断である。

[例]

図1-7、図1-8の輪荷重は車輪の中心Eを通る鉛直線AEに関して左右対称であるが、左右対称でない集中荷重についても考える。図1-9の上半は滑らかな底面JFAGMを持つ柱JFAGMLKを載荷装置とする大きさPの集中荷重で

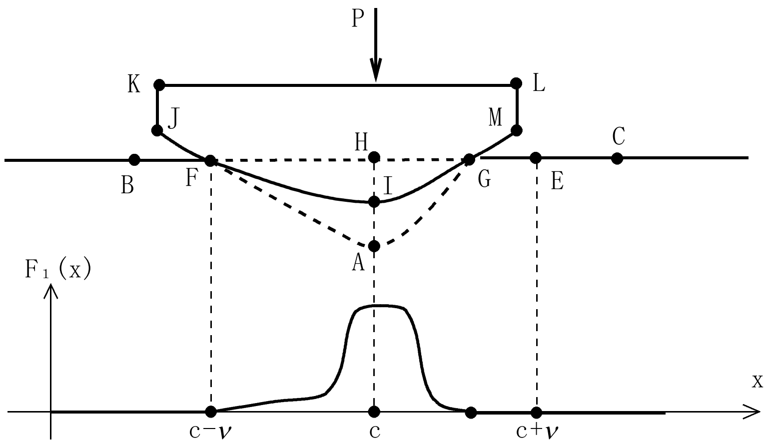

図1-9　非対称分布の集中荷重

ある。底面JFAGMは変形してJFIGMとなり、路面BFHGCは変形してBFIGCとなり、曲面FIGを介して荷重が伝達されている。曲面FIGが左右対称でなく、図1-9においてはFHがHGより長いので長さFHを点半径νとし、HE＝νとなる点Eをとり、直線FEを点域と考える。伝達される分布荷重$F_1(x)$の概形も図1-9の下半のように左右対称でない。図1-9の分布荷重$F_1(x)$も式1･20、1･21、式1･22が成り立つ。図1-8では対称であるから直線FGの２等分点が点Hであるが、図1-9では非対称であるから点Hが直線FGの２等分点ではない。点Hの座標x＝cは式1･22を満足する数値cとして、逆に定義される。点A､I､Hの座標は同じx＝cであり、点Iが集中荷重の作用点である。図1-8の凝視関数$F_1(x)$をも含む図1-9の凝視関数$F_1(x)$が式1･21、式1･22を満足するならば同等であり、式1･18、式1･19の眺望関数$f_1(x)$に対応する。図1-4の支承における長さα、βは集中力の点半径という意味で図

1-9のνと同じである。

(4)　集中モーメント

[反力モーメント]

集中モーメントが具体の構造物に図1-1のように荷重として作用することは無いと思われるが、図1-10の固定支承の反力R_Mはしばしば見られる集中モーメントである。

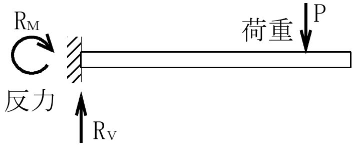

図1-10　固定支承の反力

[実験的な載荷]

図1-1の構造物に作用する荷重としての集中モーメントは、図1-11の上

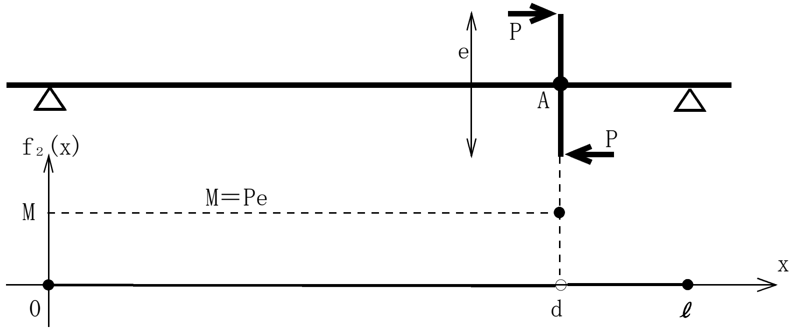

図1-11　全景眺望による集中モーメント

半の装置を用いて実験的に作用させることができる。図1-11の上半の梁の点Aに垂直に長さeの棒を取り付け、上端と下端に大きさPが同じで向きが反対の２つの力を作用させると、大きさM＝Peの集中モーメントが点Aに作用する。梁の材軸線に沿って座標xを設定し､点Aの座標x＝dとする。荷重を表示する関数$f_2(x)$とすると、図1-11の下半のように図示され、式1･23、式1･24で表される。

$f_2(x)=0$　　　　$(0\leqq x<d、d<x\leqq \ell)$　　　　1･23

$f_2(x)=M$　　　　$(x=d)$　　　　1･24

関数$f_2(x)$の単位は集中モーメントMの単位と同じNmである。関数$f_2(x)$は

眺望関数であり、定義域は区間$0 \leqq x \leqq \ell$である。

［詳細凝視］

図1-11を見ながら近付いて、点Aの近くを拡大して詳細に見ると、図1-12の上半のようになる。２つのＴ型の載荷装置を用いて鉛直な棒BADCが梁に取り付けられている。水平な板EAFを下から、水平な板GDHを上から梁に押し当てている。集中モーメントMを作用させると水平な板EAが変

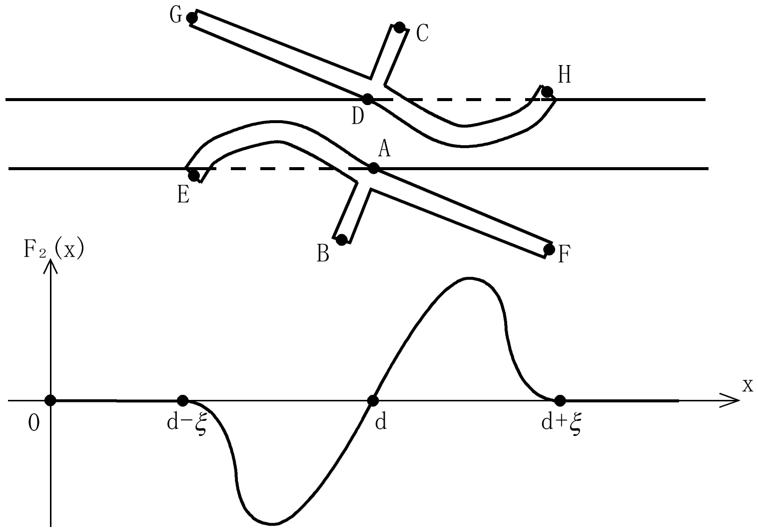

図1-12　詳細凝視による集中モーメント

形して図1-12の上半のような曲線になり、梁の下面も変形する。同様に水平な板DHが変形して曲線になり、梁の上面も変形する。曲線EAと曲線DHを介して荷重が載荷装置から梁に伝達される。点Eと点Gの座標$x=d-\xi$、点Fと点Hの座標$x=d+\xi$であり、荷重は点域$d-\xi \leqq x \leqq d+\xi$に分布する力で、概形は図1-12の下半の関数$F_2(x)$のように図示される。関数$F_2(x)$の単位はN/mであり、眺望関数$f_2(x)$の単位と異なっている。関数$F_2(x)$は凝視関数であり、定義域は区間$-\alpha \leqq x \leqq \ell+\beta$である。点域$d-\xi \leqq x \leqq d+\xi$の外には分布力$F_2(x)$は分布しないので式1・25が成り立つ。

$$F_2(x)=0 \qquad (-\alpha \leqq x \leqq d-\xi、d+\xi \leqq x \leqq \ell+\beta) \qquad 1・25$$

分布力$F_2(x)$の点$x=d$の周りのモーメントは点$x=d$における関数$f_2(x)$の

値Mと一致するから、式1・26が成り立ち、分布力$F_2(x)$の合力は0であるから、式1・27が成り立つ。

$$\int_{d-\xi}^{d+\xi} F_2(x)(x-d)\,dx = f_2(d) = M \qquad 1・26$$

$$\int_{d-\xi}^{d+\xi} F_2(x)\,dx = 0 \qquad 1・27$$

［同等な凝視関数］

図1-12の上半で梁と載荷装置の剛性が変わると曲線EAと曲線DHも変化する。曲線EAと曲線DHが異なれば、眺望関数$f_2(x)$が同じであっても、凝視関数$F_2(x)$は異なる。眺望関数$f_2(x)$と凝視関数$F_2(x)$の対応は1対多である。異なる凝視関数$F_2(x)$が同一の眺望関数$f_2(x)$に対応するとき、異なる凝視関数$F_2(x)$は互いに同等であると考える。

［全景眺望］

図1-12を見ながら遠ざかると、6点E、A、F、G、D、Hがだんだん重なって区別がつかなくなり、図1-11の上半の点Aのように見えてくる。視点移動により「図1-11の点$x=d$」と「図1-12の区間$d-\xi \leqq x \leqq d+\xi$」が対応するから、図1-11の点$x=d$は有域点である。

(5)　荷重の重ね合わせ

［足し算］

分布荷重、集中荷重、集中モーメントに分けて考察したが、図1-1には同時に作用しているから重ね合わせを考える。眺望関数$f_0(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$を重ね合わせた関数$f(x)$、凝視関数$F_0(x)$、$F_1(x)$、$F_2(x)$を重ね合わせた関数$F(x)$とする。関数$F_0(x)$、$F_1(x)$、$F_2(x)$の３つは単位N/mが同じであるから、単純な足し算で重ね合わせを表現でき、式1・28のように書ける。

$$F(x)=F_0(x)+F_1(x)+F_2(x) \qquad 1・28$$

しかし、関数$f_0(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$は単位が同じでないので、単純な足し算では重ね合わせを表現することはできない。関数$f(x)$が関数$F(x)$と同じ単位N/mを持つと考え、単位を添えて足し算すると式1・29のように書け、

両辺を単位N/mで割ると式1･30が得られる。

$$f(x)N/m=f_0(x)N/m+f_1(x)N+f_2(x)Nm \qquad 1\cdot 29$$

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)m+f_2(x)m^2 \qquad 1\cdot 30$$

[3成分]

単位mは座標xの単位であり、座標xは図1-1、図1-2の中段と下段、図1-3～図1-9の下半、図1-11と図1-12の下半の横軸であるから、単位mは横軸単位である。単位mは長さの単位であるが、長さの単位にはcmもkmも尺もfootもある。特定の単位の使用を避けて一般化するために、記号↑•→で式1･30のmを置き換え、式1･31のように表示する。

$f(x)=f_0(x)+f_1(x)$↑•→$+f_2(x)$↑•→^{2} 1･31

記号↑•→を横軸単位と呼ぶ。直交する座標軸を描き、数値1が単位であることから、横軸の数値1を示す位置に点・を記した図案から横軸単位の記号↑•→を作成した。頭文字の「ヨ」や「y」や「H」などを横軸単位の記号として用いても良いが、この本は↑•→を採用する。式1･31を見ると単位1、↑•→、↑•→^{2}を基底ベクトルとし、関数$f_0(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$を成分としたベクトル表現である。1が↑•→^{0}を、↑•→が↑•→^{1}を意味するから、↑•→の指数0、1、2を成分の次数として、関数$f_0(x)$を第0次成分、関数$f_1(x)$を第1次成分、関数$f_2(x)$を第2次成分と言う。ベクトルと同じ形式で表すのであれば、式1･32のように点,で区切り、括弧{}で包んで表すことが考えられる。

$$f(x)=\{f_0(x),f_1(x),f_2(x)\} \qquad 1\cdot 32$$

[4成分]

式1･31に式1･7を代入すれば、式1･33が得られる。

$f(x)=f_h(x)+f_d(x)$_↑$+f_1(x)$↑•→$+f_2(x)$↑•→^{2} 1･33

式1･32に式1･6を代入すれば、式1･34が得られる。

$$f(x)=\{f_h(x),f_d(x),f_1(x),f_2(x)\} \qquad 1\cdot 34$$

凝視関数F(x)は定義域が$-\alpha\leqq x\leqq \ell+\beta$の滑らかな関数である。眺望関数f(x)は左連続成分、段差成分、第1次成分、第2次成分の4つの成分から構成される定義域が$0\leqq x\leqq \ell$の関数である。

[複素数と関数擬値の類似]

式1･33や式1･34の右辺のように成分を用いた表現を眺望関数の成分統合表示と呼ぶ。成分$f_h(x)$、$f_d(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$を個別成分表示と呼ぶ。式1･33の表現を関数擬値と呼ぶ。式1･35の関数f(x)は関数値が実数単位1と虚数単位iを用いて表示される複素数値である。

$$f(x)=(x^2+4x+1)+(3x+2)i \qquad 1\cdot 35$$

式1･33も数値1と段差単位_↑と横軸単位↑•→と横軸単位の2乗↑•→^{2}を用いて表示され、複素数値と類似している。複素数値が単位2個に対して擬値が単位4個である。関数の複素数値に対して関数の擬値と呼ぶことがふさわしい。式1･34の表現を関数配列と呼ぶ。

(6)　区間における荷重の合計

[眺望関数]

荷重は構造物を移動させる効果を及ぼす。図1-13に図1-1を少し修正し

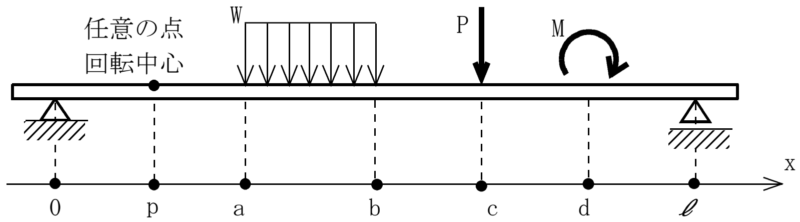

図1-13　区間における荷重の合計

て再掲する。図1-13の単純梁を上下方向に平行移動させる効果を荷重の合計が表す。荷重の合計は式1･36で表示される。

$$\int_{a+0}^{b} f_h(x)dx+f_1(c) \qquad 1\cdot 36$$

式1･36の第1項は式1･14の広義積分であり、分布荷重の合力W(b-a)である。式1･36の第2項は集中力が分布する点x=cにおける集中力Pである。図1-13では区間$0\leqq x\leqq \ell$に集中力が１個であるが、複数個が分布しているときはそれらの和である。集中モーメントは計算しない。

図1-13の単純梁を任意の点x=pの周りに回転させる効果を荷重のモー

メントの合計が表す。点x＝pは任意に設定できるから、計算の簡単のために点x＝0か点x＝ℓに重ねるのが普通である。荷重のモーメントの合計は式1･37で表示される。

$$\int_{a+0}^{b}(x-p)f_h(x)dx+(c-p)f_1(c)+f_2(d) \qquad 1\cdot37$$

式1･37の第1項は分布荷重の左連続成分$f_h(x)$のモーメントの広義積分である。式1･37の第2項は集中力が分布する点x＝cにおける集中力Pのモーメントである。式1･37の第3項は集中モーメントが分布する点x＝dにおける集中モーメントMである。複数個の集中力と集中モーメントが分布しているときは、それらの和である。

[凝視関数]

３種類の荷重についての荷重の合計の計算は式1･36に示すように異なっており、荷重のモーメントの合計の計算は式1･37に示すように異なっている。計算の方法が表面的に異なっていても、荷重の合計の計算の共通の原理が存在していると考えられる。凝視関数を用いると、荷重の合計は式1･38で表示され、荷重のモーメントの合計は式1･39で表示される。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}F(x)dx \qquad 1\cdot38$$

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-p)F(x)dx \qquad 1\cdot39$$

式1･38、式1･39は３種類の荷重について形が同じである。式1･38から式1･36が導かれ、式1･39から式1･37が導かれれば、式1･38、式1･39が荷重の合計の計算の共通の原理である。

[式1･38から式1･36を導く]

式1･38に式1･28を代入すると式1･40が得られる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}F(x)dx=\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}F_0(x)dx+\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}F_1(x)dx+\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}F_2(x)dx \qquad 1\cdot40$$

式1･40の右辺第１項の積分区間を３つに分割し、式1･15、式1･13を代入すると、式1･41が得られる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}F_0(x)dx=\int_{-\alpha}^{a-\mu}F_0(x)dx+\int_{a-\mu}^{b+\mu}F_0(x)dx+\int_{b+\mu}^{\ell+\beta}F_0(x)dx$$

$$=0+\int_{a-\mu}^{b+\mu}F_0(x)dx+0$$

$$=\int_{a-0}^{b}f_h(x)dx \qquad 1\cdot41$$

式1･40の右辺第２項の積分区間を３つに分割し、式1･20、式1･21を代入すると、式1･42が得られる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}F_1(x)dx=\int_{-\alpha}^{c-\nu}F_1(x)dx+\int_{c-\nu}^{c+\nu}F_1(x)dx+\int_{c+\nu}^{\ell+\beta}F_1(x)dx$$

$$=0+\int_{c-\nu}^{c+\nu}F_1(x)dx+0=f_1(c) \qquad 1\cdot42$$

式1･40の右辺第3項の積分区間を３つに分割し、式1･25、式1･27を代入すると、式1･43が得られる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}F_2(x)dx=\int_{-\alpha}^{d-\xi}F_2(x)dx+\int_{d-\xi}^{d+\xi}F_2(x)dx+\int_{d+\xi}^{\ell+\beta}F_2(x)dx$$

$$=0+\int_{d-\xi}^{d+\xi}F_2(x)dx+0=0 \qquad 1\cdot43$$

式1･40に式1･41、式1･42、式1･43を代入すると式1･44が得られ、式1･38から式1･36が導かれたことになる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}F(x)dx=\int_{a+0}^{b}f_h(x)dx+f_1(c) \qquad 1\cdot44$$

[式1･39から式1･37を導く]

式1･39に式1･28を代入すると式1･45が得られる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-p)F(x)dx=\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-p)F_0(x)dx+\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-p)F_1(x)dx+\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-p)F_2(x)dx \qquad 1\cdot45$$

式1･45の右辺第１項の積分区間を３つに分割し、式1･15を代入すると、式1･46が得られる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-p)F_0(x)dx=\int_{-\alpha}^{a-\mu}(x-p)F_0(x)dx+\int_{a-\mu}^{b+\mu}(x-p)F_0(x)dx+\int_{b+\mu}^{\ell+\beta}(x-p)F_0(x)dx$$

$$=0+\int_{a-\mu}^{b+\mu}(x-p)F_0(x)dx+0 \qquad 1\cdot 46$$

関数$(x-p)f_h(x)$と関数$f_h(x)$が同じ点$x=a$と$x=b$を有域点に持つことから、式1･13と同様に式1･47が成り立つ。

$$\int_{a-\mu}^{b+\mu}(x-p)F_0(x)dx=\int_{a-0}^{b}(x-p)f_h(x)dx \qquad 1\cdot 47$$

式1･47を式1･46に代入して

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-p)F_0(x)dx=\int_{a-0}^{b}(x-p)f_h(x)dx \qquad 1\cdot 48$$

式1･45の右辺第２項の積分区間を３つに分割し、式1･20、式1･21、式1･22を代入すると、式1･49が得られる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-p)F_1(x)dx=\int_{-\alpha}^{c-\nu}(x-p)F_1(x)dx+\int_{c-\nu}^{c+\nu}(x-p)F_1(x)dx+\int_{c+\nu}^{\ell+\beta}(x-p)F_1(x)dx$$

$$=0+\int_{c-\nu}^{c+\nu}(x-p)F_1(x)dx+0=\int_{c-\nu}^{c+\nu}(x-c+c-p)F_1(x)dx$$

$$=\int_{c-\nu}^{c+\nu}(x-c)F_1(x)dx+(c-p)\int_{c-\nu}^{c+\nu}F_1(x)dx$$

$$=0+(c-p)f_1(c)$$

$$=(c-p)f_1(c) \qquad 1\cdot 49$$

式1･45の右辺第３項の積分区間を３つに分割し、式1･25、式1･26、式1･27を代入すると、式1･50が得られる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-p)F_2(x)dx=\int_{-\alpha}^{d-\xi}(x-p)F_2(x)dx+\int_{d-\xi}^{d+\xi}(x-p)F_2(x)dx+\int_{d+\xi}^{\ell+\beta}(x-p)F_2(x)dx$$

$$=0+\int_{d-\xi}^{d+\xi}(x-p)F_2(x)dx+0$$

$$=\int_{d-\xi}^{d+\xi}(x-d+d-p)F_2(x)dx$$

$$=\int_{d-\xi}^{d+\xi}(x-d)F_2(x)dx+(d-p)\int_{d-\xi}^{d+\xi}F_2(x)dx$$

$$=f_2(d)+0$$

$$=f_2(d) \qquad 1\cdot 50$$

式1･45に式1･48、式1･49、式1･50を代入すると式1･51が得られ、1･39から式1･37が導かれたことになる。

$$\int_{-\alpha}^{\ell+\beta}(x-d)F(x)dx=\int_{a+0}^{b}(x-d)f_h(x)dx+(c-p)f_1(c)+f_2(d) \qquad 1\cdot 51$$

(7)　剪断力と曲げモーメントの微分

［例］

図1-14のABは集中力が作用している単純梁である。点Aの座標x＝0、点

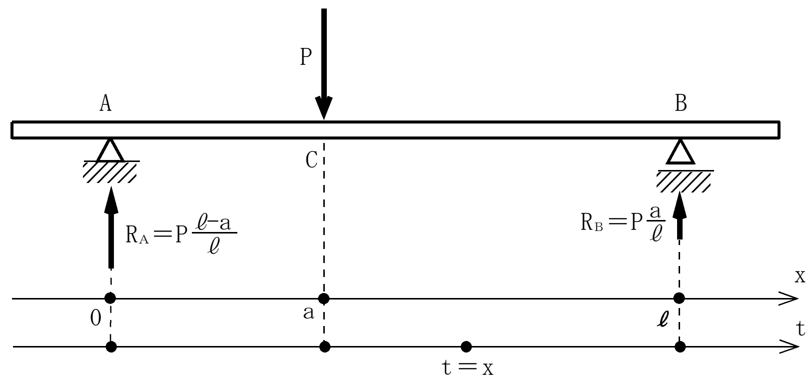

図1-14　集中力が作用する単純梁

Bの座標x＝ℓとし、座標x＝aの点Cに集中力Pが作用している。支承反力R_Aは式1･52、R_Bは式1･53で表され、単位は集中力Pと同じNである。

$$R_A=P\frac{\ell-a}{\ell} \qquad 1\cdot 52$$

$$R_B=P\frac{a}{\ell} \qquad 1\cdot 53$$

［梁外力の眺望関数］

図1-14の荷重と反力を合わせた梁外力の眺望関数$g_1(x)$は式1･54～式1･57で表される。関数$g_1(x)$の定義域は区間$0\leqq x\leqq \ell$である。外力は下向きを正とするから、関数$g_1(x)$の反力R_Aと反力R_Bの部分は負である。関

数$g_1(x)$の単位はNである。

$g_1(x)=-P\dfrac{\ell-a}{\ell}$　　(x＝0)　　1･54

$g_1(x)=0$　　(0＜x＜c、c＜x＜ℓ)　　1･55

$g_1(x)=P$　　(x＝c)　　1･56

$g_1(x)=-P\dfrac{a}{\ell}$　　(x＝ℓ)　　1･57

集中力が作用していない区間については、大きさ0の分布力が作用していると考えることもできる。分布力$g_z(x)$は式1･58で表される。

$g_z(x)=0$　　(0＜x＜c、c＜x＜ℓ)　　1･58

分布力$g_z(x)$の単位はN/mであり、関数$g_1(x)$の単位Nとは異なっている。

[梁外力の凝視関数]

図1-14の荷重と反力を合わせた梁外力の凝視関数G(x)は図1-15のように図示される。反力R_Aの点半径αと反力R_Bの点半径βを想定すれば、関

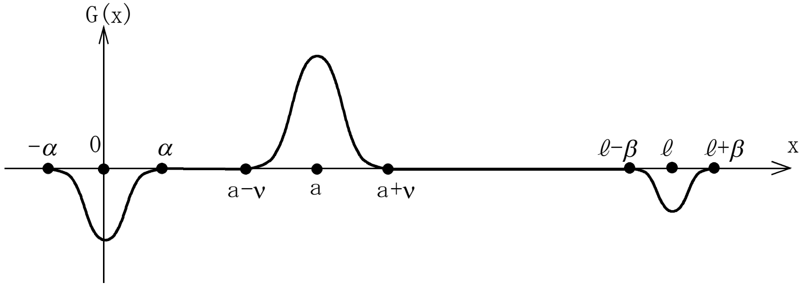

図1-15　梁外力の凝視関数

数G(x)の定義域は区間$-\alpha\leqq x\leqq \ell+\beta$である。関数G(x)の単位はN/mであり、関数$g_1(x)$の単位Nとは異なっているが、式1･58の分布力$g_z(x)$の単位と同じである。

[剪断力]

剪断力については「任意の点における剪断力は、その点より左の全ての梁外力を上向きを正にして合計したものである」と定義されている。梁外力は下向きが正であるから、梁外力と剪断力の符号が逆になっていることに注意すべきである。図1-14のように座標軸xと同じに座標軸tをとり、t軸上で点t＝xより左の区間の梁外力の合計を計算する。図1-15の凝視関数に適用すると、剪断力S(x)は式1･59で表される。

$S(x)=-\displaystyle\int_{-\alpha}^{x} G(t)\,dt$　　1･59

点t＝xより左の区間は区間$-\alpha\leqq t\leqq x$と区間$-\alpha\leqq t< x$のいずれであるかが曖昧であるが、凝視関数G(x)は連続であり、どちらであっても式1･59の積分で表される。関数S(x)の単位はNである。剪断力S(x)は図1-16のように図示される。

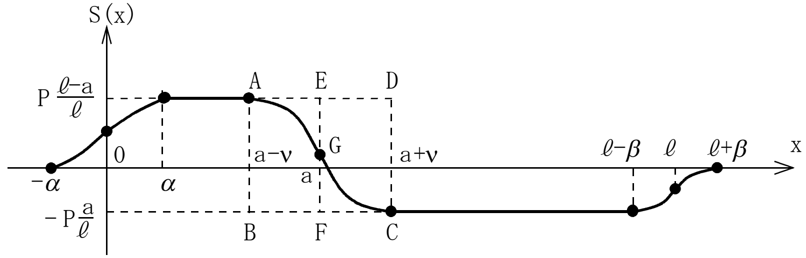

図1-16　剪断力の凝視関数

式1･59の関数S(x)は区間$-\alpha\leqq x\leqq \ell+\beta$の全ての点で一義的に定義されている。図1-16を見ながら遠ざかると、直線ABと直線DCがだんだん重なって、長方形ABCDが直線EFと区別がつかなくなり、区間$-\alpha\leqq x\leqq \alpha$と区間$\ell-\beta\leqq x\leqq \ell+\beta$も同様に鉛直線に見えてくるから、眺望関数の左連続成分$s_h(x)$と段差成分$s_d(x)$は式1･60～式1･65で表される。

$s_h(x)=0$　　(x＝0)　　1･60

$s_h(x)=P\dfrac{\ell-a}{\ell}$　　(0＜x≦a)　　1･61

$s_h(x)=-P\dfrac{a}{\ell}$　　(a＜x≦ℓ)　　1･62

$s_d(x)=P\dfrac{\ell-a}{\ell}$　　(x＝0)　　1･63

$s_d(x)=-P$　　(x＝a)　　1･64

$s_d(x)=P\dfrac{a}{\ell}$　　(x＝ℓ)　　1･65

関数$s_h(x)$と関数$s_d(x)$の単位は関数S(x)の単位と同じNである。式1･60～式1･65の眺望関数の定義域は区間$0\leqq x\leqq \ell$である。

[従来の記述]

従来の構造力学の教科書[1)]は図1-14のt軸上で点t＝xより左の区間の梁外力の合計を計算したので、区間$-\alpha \leqq t \leqq x$と区間$-\alpha \leqq t < x$のいずれであるかが曖昧であることが露呈し、集中力の作用点における計算結果が異なるので、剪断力$s_z(x)$を式1・66、式1・67で表していた。

$$s_z(x) = P\frac{\ell - a}{\ell} \qquad (0 < x < a) \qquad 1{\cdot}66$$

$$s_z(x) = -P\frac{a}{\ell} \qquad (a < x < \ell) \qquad 1{\cdot}67$$

集中力の作用点x＝0、x＝a、x＝ℓにおける剪断力$s_z(x)$を一義的に決めることができず、式1・66、式1・67は$s_z(0)$、$s_z(a)$、$s_z(\ell)$についての説明を避けている。式1・60〜式1・65の眺望関数は点x＝0、x＝a、x＝ℓも含む定義域$0 \leqq x \leqq \ell$の全域について説明している。式1・60〜式1・62の関数$s_h(x)$と式1・66、式1・67の関数$s_z(x)$は微妙に異なっている。

[曲げモーメント]

曲げモーメントについては「任意の点における曲げモーメントは、その点より左の全ての梁外力のその点の周りのモーメントを時計回りを正にして合計したものである」と定義されている。図1-14のt軸上で点t＝xより左の区間の梁外力の点t＝xの周りのモーメントの合計を計算する。図1-15の凝視関数に適用すると、曲げモーメントM(x)は式1・68で表される。

$$M(x) = \int_{-\alpha}^{x} (t - x) G(t)\, dt \qquad 1{\cdot}68$$

点t＝xより左の区間は区間$-\alpha \leqq t \leqq x$と区間$-\alpha \leqq t < x$のいずれであるかが曖昧であるが、凝視関数G(x)は連続であり、どちらであっても式1・68の積分で表される。曲げモーメントM(x)は図1-17のように図示される。式1・68の関数M(x)は区間$-\alpha \leqq x \leqq \ell + \beta$の全ての点で一義的に定義されている。図1-17を見ながら遠ざかると、3点A、C、Bがだんだん重なって点Dと区別がつかなくなり、区間$-\alpha \leqq x \leqq \alpha$と区間$\ell - \beta \leqq x \leqq \ell + \beta$も同様に点に見えてくるから、眺望関数の左連続成分$m_h(x)$と段差成分$m_d(x)$は式

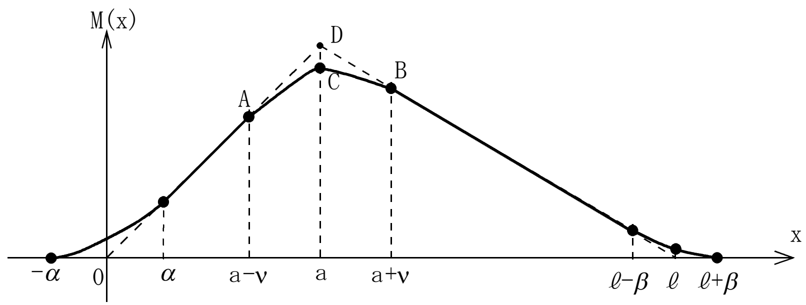

図1-17　曲げモーメントの凝視関数

1・69〜式1・71で表される。関数$m_h(x)$と関数$m_d(x)$の単位はNmである。

$$m_h(x) = P\frac{\ell - a}{\ell} x \qquad (0 \leqq x \leqq a) \qquad 1{\cdot}69$$

$$m_h(x) = -P\frac{a}{\ell}(x - \ell) \qquad (a \leqq x \leqq \ell) \qquad 1{\cdot}70$$

$$m_d(x) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq \ell) \qquad 1{\cdot}71$$

式1・69〜式1・71の眺望関数の定義域は区間$0 \leqq x \leqq \ell$である。

[従来の記述]

従来の構造力学の教科書[1)]は、図1-14のt軸上で点t＝xより左の区間の梁外力のモーメントを合計したので、合計する区間が区間$-\alpha \leqq t \leqq x$と区間$-\alpha \leqq t < x$のいずれであるか曖昧であるが、集中力の作用点における計算結果は同じになり、曲げモーメント$m_z(x)$が式1・72、式1・73で表わされていた。

$$m_z(x) = P\frac{\ell - a}{\ell} x \qquad (0 \leqq x \leqq a) \qquad 1{\cdot}72$$

$$m_z(x) = -P\frac{a}{\ell}(x - \ell) \qquad (a \leqq x \leqq \ell) \qquad 1{\cdot}73$$

点x＝aにおける曲げモーメント$m_z(a)$は式1・72、式1・73で計算されるが、両式の計算結果が一致するから、式1・72、式1・73は式1・69、式1・70と実質的に同じである。

[集中力の作用点における微分]

式1・58で表される分布荷重$g_z(x)$と式1・66、式1・67で表される剪断力$s_z(x)$と式1・72、式1・73で表される曲げモーメント$m_z(x)$は式1・74、式

1・75の関係が知られている。

$$\frac{d}{dx}s_z(x)=-g_z(x) \qquad 1\cdot 74$$

$$\frac{d}{dx}m_z(x)=s_z(x) \qquad 1\cdot 75$$

しかし、集中力の作用点$x=0$、$x=a$、$x=\ell$においては微分不能であり、式1・74、式1・75は成り立たない。式1・59で表される剪断力$S(x)$と式1・68で表される曲げモーメント$M(x)$は、点$x=0$、$x=a$、$x=\ell$に対応する点域$-\alpha\leqq x\leqq\alpha$、$a-\nu\leqq x\leqq a+\nu$、$\ell-\beta\leqq x\leqq\ell+\beta$においても微分可能であり、式1・76、式1・77のように計算される。

$$\frac{d}{dx}S(x)=-G(x) \qquad 1\cdot 76$$

$$\frac{d}{dx}M(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\alpha}^{x}(t-x)G(t)dt=\frac{d}{dx}\int_{-\alpha}^{x}tG(t)dt-\frac{d}{dx}x\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt$$

$$=xG(x)-\left(\frac{d}{dx}x\right)\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt-x\frac{d}{dx}\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt$$

$$=xG(x)-\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt-xG(x)=-\int_{-\alpha}^{x}G(t)dt=S(x) \qquad 1\cdot 77$$

従来の構造力学における剪断力や曲げモーメントは、集中力の作用点において微分不能である。凝視関数で示される剪断力や曲げモーメントは、集中力の作用点に対応する点域において、図1-16の曲線AGCや図1-17の曲線ACBのように滑らかであり、微分可能である。

第2章　汎関数型の超関数

(1)　積分不能点を含む区間の広義積分

［定義］

関数$f(x)$が点$x=c$で積分不能のときでも、補助変数ε、ζを用いて式2・1の第1辺の極限が収束するとき、関数$f(x)$は区間$a\leqq x\leqq b$で広義積分可能であると言う。ただし、$a<c<b$とする。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\zeta\to 0}\int_{c+\zeta}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c-0}f(x)dx+\int_{c+0}^{b}f(x)dx$$

$$=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx \qquad 2\cdot 1$$

式2・1の点$x=c$は積分不能ではあるが広義積分可能な点である。積分不能ではあるが広義積分可能な点は、連続的に存在する積分可能な点の中に離散的にしか存在しない。式2・1の第2辺は広義積分であることを明示するために、積分端点を$c-0$や$c+0$と表示しているが、明示する必要のないときは式2・1の第3辺、第4辺のように表示する。第4辺の表示においては積分不能な点$x=c$が意識されない。式1・1、式1・2の関数$f_h(x)$は点$x=a$、$x=b$で右側積分不能であるが、広義積分可能である。

$$f_h(x)=0 \qquad (0\leqq x\leqq a、b<x\leqq\ell) \qquad 1\cdot 1(再掲)$$

$$f_h(x)=W \qquad (a<x\leqq b) \qquad 1\cdot 2(再掲)$$

積分区間$a\leqq x\leqq b$について言えば点$x=a$で積分不能であるから、式1・14の広義積分(5頁参照)が用いられる。

［例］

式2・1の第1辺の計算を見ると、区間$c-\varepsilon\leqq x\leqq c+\zeta$が積分の計算から除外されている。$\varepsilon\to 0$、$\zeta\to 0$の極限を考えるから、積分不能な点$x=c$が除外されることになる。点$x=c$が除外されるから、点$x=c$が定義域外であっても、式2・1の広義積分を定義することができる。式2・2、式2・3、式2・4の$f(x)$は図2-1のように図示される。