第11章 補充すべき事項

(1)　実軸段差型の超関数

[定義]

図11-1に示す複素平面において、x軸上の区間a＜x＜bを含む領域Dを定義域とする複素関数F(z)を用いて式11・1で超関数f(x)を定義する。

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\} \qquad 11\cdot 1$$

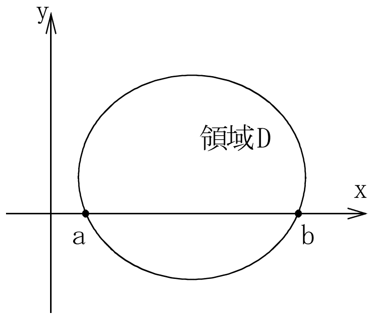

図11-1　母関数の定義域

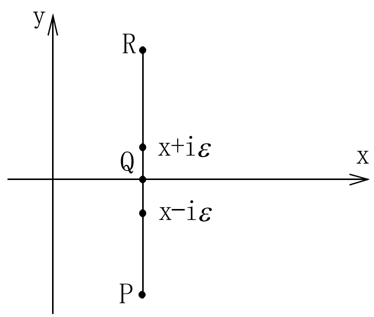

図11-2　実軸段差

複素関数F(z)を超関数f(x)の母関数と呼ぶ。区間a＜x＜bが超関数f(x)の定義域である。領域Dが複素平面の全域であれば、区間-∞＜x＜+∞が定義域である。点xにおいて式11・1の右辺の極限が収束すれば、超関数f(x)は関数値を持つ。点xにおいて式11・1の右辺の極限が収束しなくとも、点xが定義域a＜x＜b内であれば超関数f(x)が定義されていると考える。関数値を持つ点においても、関数値を持たない点においても、x軸上の点xの周辺の複素平面の点zにおける母関数F(z)の性質から間接的に超関数f(x)の状況を理解する。関数値を持つ点においてはさらに、普通の関数と同じように、独立変数xと従属変数f(x)の対応関係として理解される。汎関数型の超関数f(x)においては定義域を考えず、区間-∞＜x＜+∞における広義積分を用いて定義されるのに対して、実軸段差型の超関数においては、定義域a＜x＜bを母関数F(z)の定義域Dとx軸の交点として、図

11-1のように考える。

[普通の関数]

式11・1が0でない関数値を持つとすると図11-2のy軸に平行な直線PRとx軸の交点Qにおいて母関数F(z)は段差を生じることになる。図11-1の領域Dが複素平面の全域であるとき、上半平面が式11・2、下半平面が式11・3で表される複素関数F(z)を式11・1に代入すれば、式11・4のように計算され、式2・54の関数f(x)が得られる。

$$F(z)=\frac{1}{2}z+1 \qquad (\mathrm{Im}(z)>0) \qquad 11\cdot 2$$

$$F(z)=0 \qquad (\mathrm{Im}(z)<0) \qquad 11\cdot 3$$

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left\{\frac{1}{2}(x+i\varepsilon)+1\right\}-0\right] \qquad 11\cdot 4$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1 \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad 2\cdot 54(\text{再掲})$$

式11・2、式11・3の関数F(z)は式11・5、式11・6のように点z＝-2以外の実数軸上で関数値が存在しない。

$$F(z)=(\text{不定義}) \qquad (\mathrm{Im}(z)=0、z\neq -2) \qquad 11\cdot 5$$

$$F(z)=0 \qquad (z=-2) \qquad 11\cdot 6$$

図11-2の点Qにおける段差は成分表示型の理論における段差と状況が異なる。成分表示型の理論においては、滑らかな段差を考えるために図8-9に示されるような細工を施している。図11-2の点Qにおける段差は、滑らかと考えるための細工を施している形跡がない。図11-2の点Qは滑らかでない段差である。実数軸において滑らかでない段差が生じるので、母関数F(z)は式11・5のように実数軸上で関数値が存在しない。母関数F(z)の関数値が存在しないが、対応の不完全を許容(151頁参照)しており、実数軸が母関数F(z)の定義域外とは考えない。上半平面と下半平面のそれぞれにおいて母関数F(z)は正則である。式2・54の関数f(x)は無限回微分可能であるのに、その母関数F(z)は実数軸上で微分不能である。x軸上で関数値が存在しない母関数F(z)が独立変数xの関数f(x)を定義する。

[関数値0の定数関数]

母関数F(z)が領域Dの全域で正則であればx軸においても段差を生じず、

超関数f(x)は関数値0の定数関数になる。

[同等な母関数]

関数ϕ(z)が領域Dの全域で正則であるとすると式11・7のG(x)を母関数とする超関数g(x)は式11・8のように計算される。

$$G(z)=F(z)+\phi(z) \qquad 11\cdot7$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{\varepsilon\to0}\{G(x+i\varepsilon)-G(x-i\varepsilon)\} \\ &= \lim_{\varepsilon\to0}[\{F(x+i\varepsilon)+\phi(x+i\varepsilon)\}-\{F(x-i\varepsilon)+\phi(x-i\varepsilon)\}] \\ &= \lim_{\varepsilon\to0}[\{F(x+i\varepsilon)-\{F(x-i\varepsilon)\}+\{\phi(x+i\varepsilon)-\phi(x-i\varepsilon)\}] \\ &= f(x) \qquad 11\cdot8 \end{aligned}$$

関数ϕ(z)が正則関数であるから式11・9が成り立ち、式11・8の計算で使われている。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\{\phi(x+i\varepsilon)-\phi(x-i\varepsilon)\}=0 \qquad 11\cdot9$$

式11・7の母関数G(z)と母関数F(z)は式11・8に示すように同じ超関数を定義するので同等であるという。

[近似関数]

式11・1の右辺の補助変数εの極限操作をする前には、式11・10ように補助変数εを含んだ関数F(x)を考えることができる。

$$(\text{近似関数})F(x)=(\text{母関数})F(x+i\varepsilon)-(\text{母関数})F(x-i\varepsilon) \qquad 11\cdot10$$

式11・10で文字Fは(近似関数)か(母関数)の註記が添えられており、2つの異なる意味で用いられている。式11・10の右辺のFは母関数を表す。母関数F(z)は補助変数εを含まず、独立変数は複素数zである。式11・10の右辺を計算すると虚数単位iは消去される。式11・10の左辺のFは近似関数を表す。汎関数型の理論において、超関数f(x)は小文字で、近似関数F(x)は大文字で表すことを原則にしていた。式11・1の超関数f(x)は実軸段差型で定義されている。式11・1の超関数f(x)と同じ超関数を汎関数型で定義することができ、近似関数F(x)を用いる。実軸段差型の母関数F(z)と汎関数型の近似関数F(x)を並べて論ずることを普通はしないので、同じ文字Fを用いている。並べて論ずるときは、式11・10のように註記を添えて、混乱しないように注意すべきである。

[ディラック関数]

式11・11の母関数Δ(z)は式11・12によりディラック関数δ(x)を定義する。

$$\Delta(z)=-\frac{1}{2\pi iz} \qquad 11\cdot11$$

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\{\Delta(x+i\varepsilon)-\Delta(x-i\varepsilon)\}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \qquad 11\cdot12$$

実軸段差型におけるディラック関数δ(x)は区間x≠0において式11・13で定義され、式11・14が成り立つから、関数値δ(0)は存在しない。

$$\delta(x)=0 \qquad (x\neq0) \qquad 11\cdot13$$

$$\Delta(0)=\infty \qquad 11\cdot14$$

複素関数の理論においては、複素球面の上に点z=∞が存在し、式11・14のように書くことができる。近似関数Δ(x)は式11・15のように計算される。

$$\begin{aligned} (\text{近似関数})\Delta(x) &= (\text{母関数})\Delta(x+i\varepsilon)-(\text{母関数})\Delta(x-i\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x-i\varepsilon}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \qquad 11\cdot15 \end{aligned}$$

式11・15の近似関数Δ(x)は式6・1の近似関数Δ(x)と同じ(129頁参照)である。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \qquad \text{式}6\cdot1(\text{再掲})$$

式6・1の近似関数Δ(x)を用いて式2・59、式2・60により、汎関数型のディラック関数δ(x)が定義(39頁参照)される。式6・1の近似関数Δ(x)から式11・15を逆にたどって式11・11の母関数Δ(z)が得られ、母関数Δ(z)を用いて式11・12により実軸段差型のディラック関数δ(x)が定義される。式6・1、式2・59、式2・60で定義される汎関数型のディラック関数δ(x)と式11・11、式11・12で定義される実軸段差型のディラック関数δ(x)が同じであることが了解される。

汎関数型においては式2・61の関数Δ(x)と式6・1の関数Δ(x)は同等な近似関数である。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right) \qquad 2\cdot61(\text{再掲})$$

式6·1の近似関数$\Delta(x)$に式11·11の母関数$\Delta(z)$が対応する。式2·61の近似関数$\Delta(x)$に対応する母関数を求めようとして、式11·11の母関数$\Delta(z)$と正則関数$\phi(z)$を用いて式11·16の母関数F(z)を考える。

$$F(z)=\Delta(z)+\phi(z) \qquad 11·16$$

式11·16の左辺の母関数F(z)と右辺の母関数$\Delta(z)$は同等であるから、適切に正則関数$\phi(z)$を選べば式11·16の母関数F(z)が式2·61の近似関数に対応すると期待される。しかし、式11·16の母関数F(z)を用いて式11·17のように計算すると式6·1の近似関数$\Delta(x)$が得られ、正則関数$\phi(z)$をどのように選んでも、式2·61の近似関数$\Delta(x)$は得られない。

$$\begin{aligned}\delta(x)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}[\{\Delta(x+i\varepsilon)+\phi(x+i\varepsilon)\}-\{\Delta(x-i\varepsilon)+\phi(x-i\varepsilon)\}]\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}[\{\Delta(x+i\varepsilon)-\Delta(x-i\varepsilon)\}-\{\phi(x+i\varepsilon)-\phi(x-i\varepsilon)\}]\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\{\Delta(x+i\varepsilon)-\Delta(x-i\varepsilon)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \qquad 11·17\end{aligned}$$

式11·17の計算で式11·9が用いられている。式6·1の近似関数$\Delta(x)$に式11·11の母関数$\Delta(z)$が対応するが、式2·61の近似関数$\Delta(x)$に対応する母関数は存在しない。

式11·17の計算は、関数$\phi(z)$が正則関数であるから、式11·8の計算と同型であり、近似関数F(x)と母関数F(z)の関係に一般化することができる。近似関数F(x)と母関数F(z)が対応するとき、同等な近似関数G(x)に対応する母関数は存在しない。母関数F(z)と近似関数F(x)が対応するとき、同等な母関数G(z)に対応する近似関数はF(x)である。汎関数型における近似関数の同等と実軸段差型における母関数の同等は異なっている。汎関数型の理論における近似関数の集合と実軸段差型の理論における近似関数の集合は式11·18の包含関係が成り立つ。

汎関数型の近似関数の集合⊃実軸段差型の近似関数の集合　　11·18

式11·18の包含関係から、汎関数型の理論の方が実軸段差型の理論より一般性が高いと思われる。

[ヘビサイド関数]

式11·19の母関数$H(z)$は式11·20によりヘビサイド関数$\eta(x)$を定義する。

$$H(z)=-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(-z) \qquad 11·19$$

$$\eta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{H(x+i\varepsilon)-H(x-i\varepsilon)\} \qquad 11·20$$

複素関数の理論では、対数関数log zはn=・・・、-3、-2、-1、0、1、2、3、・・・として$2n\pi i$の不確定を持つので、式11·19では、n=0とした主値Log zを用いる。対数関数の主値は広義積分の主値(54頁参照)と異なるから注意が必要である。主値Log zは独立変数zの絶対値|z|と偏角Arg zを用いて式11·21で表されるから、式11·19の母関数$H(z)$は式11·22に書き換えられる。

$$\mathrm{Log}\ z=\log|z|+i\mathrm{Arg}\ z \qquad 11·21$$

$$\begin{aligned}H(z)&=-\frac{1}{2\pi i}\{\log|-z|+i\,\mathrm{Arg}(-z)\}=-\frac{1}{2\pi i}\log|z|-\frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(-z)\\&=-\frac{1}{2\pi}\{\frac{1}{i}\log|z|-\mathrm{Arg}(-z)\} \qquad 11·22\end{aligned}$$

式11·20に式11·22を代入すれば、式11·23が得られる。

$$\begin{aligned}\eta(x)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\{H(x+i\varepsilon)-H(x-i\varepsilon)\}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}[-\frac{1}{2\pi}\{\frac{1}{i}\log|-x-i\varepsilon|+\mathrm{Arg}(-x-i\varepsilon)\}\\&\qquad+\frac{1}{2\pi}\{\frac{1}{i}\log|-x+i\varepsilon|+\mathrm{Arg}(-x+i\varepsilon)\}]\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{1}{2\pi i}\{\log|-x+i\varepsilon|-\log|-x-i\varepsilon|\}\\&\qquad+\frac{1}{2\pi}\{\mathrm{Arg}(-x+i\varepsilon)+\mathrm{Arg}(-x-i\varepsilon)\}]\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\{\mathrm{Arg}(-x+i\varepsilon)+\mathrm{Arg}(-x-i\varepsilon)\} \qquad 11·23\end{aligned}$$

式11·23の計算で式11·24が使われている。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\{\log|-x+i\varepsilon|-\log|-x-i\varepsilon|\}=0 \qquad 11·24$$

$\varepsilon>0$であるから、図11-3に示すようにx<0のとき、式11·25が成り立ち、図11-4に示すように0<xのとき、式11·26が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\mathrm{Arg}(-x+i\varepsilon)-\mathrm{Arg}(-x-i\varepsilon)\}=\{0-(-0)\}=0 \qquad (x<0) \qquad 11·25$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\mathrm{Arg}(-x+i\varepsilon)-\mathrm{Arg}(-x-i\varepsilon)\}=\{\pi-(-\pi)\}=2\pi \qquad (0<x) \qquad 11·26$$

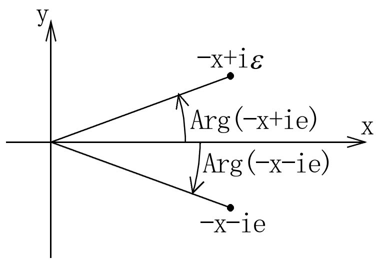

図11-3　x＜0のとき

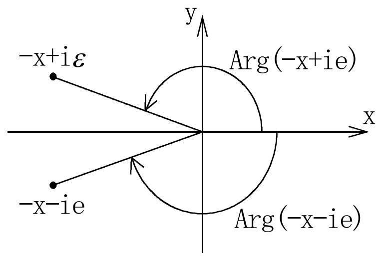

図11-4　0＜xのとき

式11·25、式11·26を式11·23に代入すると、式2·119、式2·114が成り立つ。

$\eta(x)=0 \qquad (-\infty<x<0) \qquad$ 2·119(再掲)

$\eta(x)=1 \qquad (0<x<+\infty) \qquad$ 2·114(再掲)

実軸段差型におけるヘビサイド関数$\eta(x)$は区間x≠0において式2·119、式2·114で定義される。式11·22の母関数$H(z)$は独立変数zの複素平面の直線y＝0、0＜xにおいて段差を生じている。式11·27が成り立つから、関数値$\eta(0)$は存在しない。

$H(0)=\infty \qquad$ 11·27

［和］

母関数の演算から超関数の演算が導かれる。超関数f(x)の母関数F(z)、超関数g(x)の母関数G(z)とするとき、式11·28で定義されるJ(z)を母関数とする超関数j(x)は式11·29のように計算され、和を定義する。

$J(z)=F(z)+G(z) \qquad$ 11·28

$$\begin{aligned} j(x)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\{J(x+i\varepsilon)-J(x-i\varepsilon)\}\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}[\{F(x+i\varepsilon)+G(x+i\varepsilon)\}-\{F(x-i\varepsilon)+G(x-i\varepsilon)\}]\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}[\{F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\}+\{G(x+i\varepsilon)-G(x-i\varepsilon)\}]\\ &=f(x)+g(x) \qquad \text{11·29}\end{aligned}$$

［関数と超関数の積］

超関数f(x)の母関数F(z)とするとき、正則関数$\phi(z)$を用いて式11·30で定義されるJ(z)を母関数とする超関数j(x)は式11·31のように計算され、積を定義する。

$J(z)=\phi(z)\cdot F(z) \qquad$ 11·30

$$\begin{aligned} j(x)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\{J(x+i\varepsilon)-J(x-i\varepsilon)\}\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\{\phi(x+i\varepsilon)F(x+i\varepsilon)-\phi(x-i\varepsilon)F(x-i\varepsilon)\}\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\{\phi(x+i\varepsilon)F(x+i\varepsilon)-\phi(x+i\varepsilon)F(x-i\varepsilon)\\ &\qquad+\phi(x+i\varepsilon)F(x-i\varepsilon)-\phi(x-i\varepsilon)F(x-i\varepsilon)\}\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}[\phi(x+i\varepsilon)\{F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\}+\{\phi(x+i\varepsilon)-\phi(x-i\varepsilon)\}F(x-i\varepsilon)]\\ &=\phi(x)\cdot f(x) \qquad \text{11·31}\end{aligned}$$

関数$\phi(z)$が正則だから式11·9、式11·32が成り立ち、式11·31の計算で用いられている。

$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\phi(x+i\varepsilon)-\phi(x-i\varepsilon)\}=0 \qquad$ 11·9(再掲)

$\lim_{\varepsilon\to 0}\phi(x+i\varepsilon)=\phi(x) \qquad$ 11·32

［定数倍］

式11·30で関数$\phi(z)$を関数値cの定数関数とすれば式11·31は式11·33と書き換えられ、定数倍が得られる。

$j(x)=c\cdot f(x) \qquad$ 11·33

［差］

数値-1の定数倍と和の演算を行えば式11·34の差を定義することができる。

$j(x)=f(x)-g(x) \qquad$ 11·34

［微分］

超関数f(x)の母関数F(z)とするとき、式11·35で定義されるJ(z)を母関数とする超関数j(x)は式11·36のように計算され、導関数を定義する。

$J(z)=F'(z) \qquad$ 11·35

$$\begin{aligned} j(x)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\{J(x+i\varepsilon)-J(x-i\varepsilon)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\{F'(x+i\varepsilon)-F'(x-i\varepsilon)\}\\ &=f'(x) \qquad \text{11·36}\end{aligned}$$

［注意］

成分表示型の理論においては、式2·61の$\Delta(x)$や式4·11、式4·12の$\Delta(x)$を近似関数とし、近似関数$\Delta(x)$が微分可能だからディラック関数$\delta(x)$が点x＝0において微分可能と考える。実軸段差型の理論におけるディラック関数$\delta(x)$の母関数$\Delta(z)$は式11·11で表される。

$$\Delta(z)=-\frac{1}{2\pi iz} \qquad 11\cdot11(再掲)$$

式11・11は点z＝0において微分不能である。実軸段差型の理論においては、ディラック関数$\delta(x)$のx＝0における微分可能性について、特段の説明が無いにもかかわらず、微分可能と考える。成分表示型の理論においては、式2・73の$H(x)$や式4・13、式4・14、式4・15の$H(x)$を近似関数とし、近似関数$H(x)$が微分可能だから、ヘビサイド関数$\eta(x)$が点x＝0において微分可能と考える。実軸段差型の理論におけるヘビサイド関数$\eta(x)$の母関数$H(z)$は式11・20で表される。

$$H(z)=-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(-z) \qquad 11\cdot20(再掲)$$

式11・20は点z＝0において微分不能である。実軸段差型の理論においては、ヘビサイド関数$\eta(x)$のx＝0における微分可能性について、特段の説明が無いにもかかわらず、微分可能と考える。

［線積分］

図11-5の領域Dで定義された複素関数F(z)について、領域Dの内部の曲

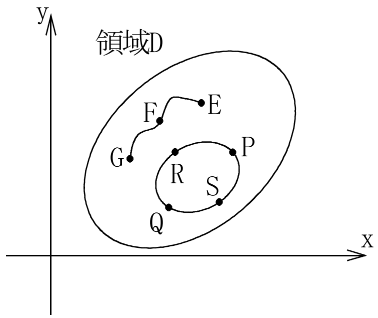

図11-5　線積分の積分経路

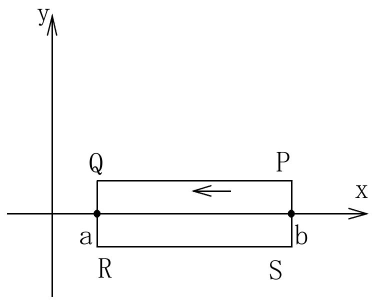

図11-6　長方形PQRSの線積分

線がEFGに沿って式11・37で線積分を定義する。

$$\int_{EFG} F(z)\,dz \qquad 11\cdot37$$

複素関数F(z)が図11-5の閉曲線PRQSPの内側で正則であれば、閉曲線PRQSPに沿って一周した線積分について式11・38が成り立つ。

$$\int_{PRQSP} F(z)\,dz=0 \qquad 11\cdot38$$

図11-5の閉曲線PRQSPの内側に特異点があれば、式11・38の線積分は0でない値を持つ。式11・38の左辺の線積分を式11・39のように分割する。

$$\int_{PRQSP} F(z)\,dz=\int_{PRQ} F(z)\,dz+\int_{QSP} F(z)\,dz=\int_{PRQ} F(z)\,dz-\int_{PSQ} F(z)\,dz \qquad 11\cdot39$$

式11・38と式11・39を組み合わせると式11・40が得られる。

$$\int_{PRQ} F(z)\,dz=\int_{PSQ} F(z)\,dz \qquad 11\cdot40$$

曲線が正則な領域を通過しているならば、線積分は曲線の端点P、Qだけによって決められることを式11・40は示している。

［定積分］

図11-6の長方形PQRSPを積分経路とすると積分は式11・41のように分割される。

$$\int_{PQRSP} F(z)\,dz=\int_{PQ} F(z)\,dz+\int_{QR} F(z)\,dz+\int_{RS} F(z)\,dz+\int_{SP} F(z)\,dz \qquad 11\cdot41$$

x軸上の区間a＜x＜bに特異点があれば式11・41は0以外の値を持つ。図11-6で式11・42とする。

$$QR=SP=2\varepsilon \qquad 11\cdot42$$

$\varepsilon\to0$を考えると、長さQR→0、長さSP→0であり、式11・43が成り立つ。

$$\int_{QR} F(z)\,dz+\int_{SP} F(z)\,dz \to 0 \qquad 11\cdot43$$

$\varepsilon\to0$を考えると式11・41に式11・43を代入して式11・44が成り立つ。

$$\int_{PQRS} F(z)\,dz \to \int_{PQ} F(z)\,dz+\int_{RS} F(z)\,dz=-\int_{QP} F(x+i\varepsilon)\,dz+\int_{RS} F(x-i\varepsilon)\,dz$$

$$\to -\int_a^b \{F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\}\,dx \to -\int_a^b f(x)\,dx \qquad 11\cdot44$$

式11・44を基にして、超関数f(x)の母関数F(z)とするとき、図11-7の閉曲線Cを用いて式11・45で定積分を定義する。

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_C F(z)\,dz \qquad 11\cdot45$$

図11-7に示すように積分経路Cは、点z＝a、z＝bを通る閉曲線を反時計回りに1周する。式11･40が成り立つから、図11-8に示すように積分経路Cの

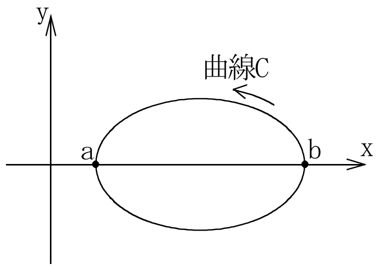

図11-7　超関数の線積分

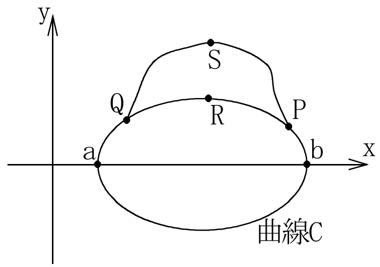

図11-8　積分経路の変更

一部PRQをPSQに変更しても、曲線PSQRPに囲まれた領域で母関数F(z)が正則であれば、定積分は変わらない。

[ディラック関数の定積分]

式11･11、式11･12のディラック関数$\delta(x)$について式11･45の定積分を行うと式11･46のように計算される。

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = -\int_C \Delta(z)\,dz \qquad 11\cdot46$$

式11･11の母関数$\Delta(z)$は点z＝0に特異点を持ち、他の点は全て正則である。a＜b＜0、0＜a＜bの場合、2点x＝a、x＝b以外でx軸と交わらないように積分経路Cを選べば、特異点z＝0が曲線Cの外側になるから、式11･46は式11･47のように計算される。

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 0 \qquad (a<b<0、0<a<b) \qquad 11\cdot47$$

a＜0＜bの場合、2点x＝a、x＝b以外でx軸と交わらないように積分経路Cを選べば、特異点z＝0が積分経路Cの内側にある。特異点z＝0を内側に持つ別の曲線に積分経路を変更しても定積分は変わらないから、積分経路を中心z＝0、半径rの円Cに変更する。角度θを補助変数として式11･48、式11･49の変数変換を行う。積分経路の円Cは積分区間$0<\theta<2\pi$

になる。

$$z = re^{i\theta} \qquad 11\cdot48$$

$$dz = rie^{i\theta}\,d\theta \qquad 11\cdot49$$

式11･46は式11･50のように計算される。

$$\begin{aligned}\int_a^b \delta(x)\,dx &= \int_{-r}^{r} \delta(x)\,dx = -\int_C \Delta(z)\,dz \\ &= -\int_C \left(-\frac{1}{2\pi iz}\right) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{re^{i\theta}}\, rie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1 \qquad (a<0<b) \qquad 11\cdot50\end{aligned}$$

式11･50により、ディラック関数$\delta(x)$の特異点x＝0付近の定積分が母関数$\Delta(z)$の特異点z＝0付近の線積分を介して説明される。ディラック関数$\delta(x)$の特異点x＝0の性質を母関数$\Delta(z)$の特異点z＝0の性質を介して理解することになる。

[積分区間の端点についての注意]

積分区間の端点a、bが特異点x＝0に重なることについての説明は見当たらない。実軸段差型の理論において、積分端点が特異点に重なることは想定されていないと思われる。成分表示型の理論においては数値aを定積分の端点とせず、記号a-0、a+0を定積分の端点とし、積分区間の端点が特異点x＝0に重なることを避けている。成分表示型の理論においては原始関数の上端がディラック関数$\delta(x)$の特異点x＝0に重なる場合についても論ぜられる。汎関数型の理論においてはディラック関数$\delta(x)$の積分区間は区間$-\infty<x<+\infty$しか考えられず、区間a＜x＜bの積分は考えない。

[分布と実軸段差型の超関数]

実軸段差型の理論は、1958年頃に日本の佐藤幹雄を中心に着想された理論であり、今井功が1981年頃に書いた教科書[10)11)]に記述されている。複素関数について微分や積分を考える関数論[6)]は体系的に研究され、良く知られているている。複素関数を用いて超関数を定義するので、良く知られた複素関数の性質をもとに超関数の性質を考察することができる。その理論は「佐藤の超関数」と呼ばれることが多いが、この本では理論

構成の特徴を捉えて「実軸段差型の超関数」と呼ぶことにした。

　実軸段差型の理論は分布を表現するとは考えられていないようである。式11･1で超関数f(x)を複素関数F(z)と関係付け、複素関数F(z)の性質から間接的に超関数の性質を考察するが、複素関数F(z)と分布の関連は言及されていない。ディラック関数δ(x)やヘビサイド関数η(x)の点x＝0における微分可能性について、式11･11の母関数Δ(z)や式11･20の母関数H(z)を用いた説明は見当たらない。実軸段差型の理論は、超関数の特異点について対応の不完全を許容する定義を適用しており、関数の一義性を放棄している。構造力学の荷重の分布を考察するときに用いるのに、実軸段差型の理論は適していない。

(2)　演算子型の超関数

[微分方程式を代数的に解く技術]

　微分方程式を代数的な計算によって解く技術として西暦1900年頃から発展してきた演算子法が超関数と密接な関係がある。1953年頃にポーランドのミクシンスキーが書いた教科書にわかり易く記述されており、日本語訳[12)13)]もある。演算子法において演算子は超関数と類似した性質を示し、超関数とは呼ばれないが、この本では、理論構成の特徴を捉えて「演算子型の超関数」と呼ぶことにした。超関数との類似に注意しながら演算子について概略を考察する。

[関数と関数値]

　関数と関数値を厳密に区別することが演算子法の特徴の1つである。関数についての初等理論において用いられる記号f(x)は独立変数xの関数を表示するが、独立変数xの値がxであるときの関数値も意味する。独立変数xに関数fが作用して関数値f(x)が生じると考える。作用するという意味で関数fも演算子である。式2･54の右辺のような数式について括弧{}を用いて式11･51のように関数fを表示する。

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1 \qquad 2･54(再掲)$$

$$f=\{\frac{1}{2}x+1\} \qquad 11･51$$

x＝4のときの関数値は式11･52のように書かれるが、式11･51を意識すれば式11･53のように書かれる。

$$f(4)=3 \qquad 11･52$$

$$\{\frac{1}{2}x+1\}(4)=3 \qquad 11･53$$

数値3と定数関数{3}のように数値と定数関数も厳格に区別される。

[右半分関数]

　演算子法で用いる関数は式11･54のように区間-∞＜x＜0において関数値0であり、右半分関数である。

$$f(x)=0 \qquad (-\infty<x<0) \qquad 11･54$$

関数値1の定数関数{1}も式11･54を満足するので式11･55、式11･56が成り立つ。

$$\{1\}(x)=0 \qquad (-\infty<x<0) \qquad 11･55$$

$$\{1\}(x)=1 \qquad (0<x<+\infty) \qquad 11･56$$

演算子法における関数は対応の不完全を許容(151頁参照)しており、点x＝0における関数値には注意が払われない。式11･55、式11･56は式2･119、式2･114と同じであり、点x＝0における対応の不完全を許容すれば演算子法における定数関数{1}はヘビサイド関数η(x)と同じである。

[畳み込み]

　関数fと関数gの畳み込みを式11･57で定義する。

$$f\cdot g=\{\int_0^x f(x-t)\cdot g(t)\,dt\} \qquad 11･57$$

畳み込みの演算を式11･57の左辺のように積と同じf･gで表現する。式11･58、式11･59の変数変換を行うと表11=1のように積分区間が対応し、式11･57は式11･60のように計算される。

表11=1 積分区間の対応

t	0 → x
u	x → 0

$$x-t=u \qquad 11･58$$

$$dt=-du \qquad 11･59$$

$$\int_0^x f(x-t)\cdot g(t)\,dt=\int_x^0 f(u)\cdot g(x-u)\,(-du)=\int_0^x f(u)\cdot g(x-u)\,du$$

$$=\int_0^x f(t)\cdot g(x-t)\,dt=\int_0^x g(x-t)\cdot f(t)\,dt \qquad 11\cdot60$$

式11・60が成り立つから畳み込みについて式11・61が成り立ち、交換可能であり、形式的には代数における積と同じような計算ができる。誤解を生じない場合には畳み込みを積と呼んでも良い。

$$f\cdot g=g\cdot f \qquad 11\cdot61$$

[畳み込みの積分区間]

関数f(x)が式11・54を満足すれば、変数uとして式11・62が成り立つ。

$$f(u)=0 \qquad (-\infty<u<0) \qquad 11\cdot62$$

定数x、変数tとして式11・63の変数変換すれば、区間-∞＜u＜0が区間x＜t＜+∞に対応するから、式11・64が成り立つ。

$$u=x-t \qquad 11\cdot63$$

$$f(x-t)=0 \qquad (x<t<+\infty) \qquad 11\cdot64$$

式11・64を代入して計算すれば、式11・65が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\cdot g(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} f(x-t)\cdot g(t)\,dt+\int_0^x f(x-t)\cdot g(t)\,dt+\int_x^{+\infty} f(x-t)\cdot g(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} f(x-t)\cdot 0\cdot dt+\int_0^x f(x-t)\cdot g(t)\,dt+\int_x^{+\infty} 0\cdot g(t)\,dt$$

$$=\int_0^x f(x-t)\cdot g(t)\,dt \qquad 11\cdot65$$

畳み込みの定義を式11・57の替わりに式11・66としても良いことを式11・65は示している。

$$f\cdot g=\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\cdot g(t)\,dt\} \qquad 11\cdot66$$

式2・48の左辺と式11・66の右辺が類似していることに注目すべきである。

[和]

関数fと関数gの和を式11・67で定義する。

$$f+g=\{f(x)+g(x)\} \qquad 11\cdot67$$

和の演算においても交換可能であり、式11・68が成り立つ。

$$f+g=g+f \qquad 11\cdot68$$

畳み込みと和の演算において式11・69が成り立つ。

$$f\cdot(g+j)=f\cdot g+f\cdot j \qquad 11\cdot69$$

[数演算子]

定数cと関数fの積を式11・70で定義する。

$$c\cdot f=\{c\cdot f(x)\} \qquad 11\cdot70$$

式11・70の左辺は式11・57の左辺と同形であり、定数cも演算子である。演算子cを数演算子と呼ぶ。数演算子cと定数関数{c}は厳格に区別される。数値aは2つの定数関数{a}と{1}を用いて式11・71のように割算で表される。

$$a=\frac{\{a\}}{\{1\}} \qquad 11\cdot71$$

[積分演算子]

定数関数{1}と関数fの畳み込みを行うと式11・72のように関数fの積分になるので、定数関数{1}を積分演算子と呼ぶ。

$$\{1\}\cdot f=f\cdot\{1\}=\{\int_0^x f(t)\cdot\{1\}(x-t)\cdot dt\}=\{\int_0^x f(t)\cdot 1\cdot dt\}$$

$$=\{\int_0^x f(t)\,dt\} \qquad 11\cdot72$$

[定数関数{1}の冪]

式11・72の関数fに定数関数{1}を代入すると式11・73が得られる。

$$\{1\}^2=\{1\}\{1\}=\{\int_0^x 1\cdot dt\}=\{x\} \qquad 11\cdot73$$

式11・72の関数fに式11・73の関数$\{1\}^2$を代入すると式11・74が得られる。

$$\{1\}^3=\{1\}\{1\}^2=\{1\}\{x\}=\{\int_0^x t\cdot dt\}=\{\frac{\{x\}^2}{2}\} \qquad 11\cdot74$$

式11・73、式11・74の計算から一般に式11・75が成り立つ。

$$\{1\}^n=\{\frac{\{x\}^{n-1}}{(n-1)!}\} \qquad 11\cdot75$$

[微分演算子]

式11・76の演算子sは積分演算子{1}の逆算であるから微分演算子である。

$$s=\frac{1}{\{1\}} \qquad 11・76$$

関数f(x)について式11・77が成り立つ。

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt \qquad 11・77$$

式11・77を変形すると、式11・78、式11・79が得られる。

$$\{f(x)-f(0)\}=\{\int_0^x f'(t)dt\}$$

$$f-f(0)\{1\}=\{1\}f'$$

$$f'=sf-f(0) \qquad 11・78$$

$$sf=f'+f(0) \qquad 11・79$$

微分演算子sと関数fの積sfと導関数f'は式11・79に示すように同じでないので注意が必要である。

[指数関数]

関数{exp(ax)}について式11・79を適用すると式11・80が成り立ち、式11・81のように変形される。

$$s\{\exp(ax)\}=a\{\exp(ax)\}+\{\exp(ax)\}(0) \qquad 11・80$$

$$(s-a)\{\exp(ax)\}=1$$

$$\{\exp(ax)\}=\frac{1}{(s-a)} \qquad 11・81$$

[注意]

式11・79のf(0)について注意が必要である。演算子法で用いる関数は右半分関数であるから、点x＝0で不連続になる場合がある。不連続点x＝0において対応の不完全を許容すると関数値f(0)が一義的に決まらない。右半分関数であるexp(ax)は点x＝0で不連続であり、式11・82、式11・83が成り立つ。

$$\{\exp(ax)\}(-0)=0 \qquad 11・82$$

$$\{\exp(ax)\}(+0)=1 \qquad 11・83$$

式11・80から式11・81への変形は、特段の説明はないが、式11・83が用いられており、点x＝0において右連続であると推察される。

[例]

式11・81を用いると式11・84の微分方程式を解くことができる。

$$f''(x)+\omega^2 f(x)=0 \qquad 11・84$$

式11・78を再帰的に用いて式11・85が得られる。

$$f''=sf'-f'(0)=s(sf-f(0))-f'(0)=s^2f-sf(0)-f'(0) \qquad 11・85$$

式11・85を式11・84に代入して式11・86が得られ、式11・87のように解かれる。

$$s^2f-sf(0)-f'(0)+\omega^2 f=0 \qquad 11・86$$

$$s^2f+\omega^2 f=sf(0)+f'(0)$$

$$(s^2+\omega^2)f=sf(0)+f'(0)$$

$$f=\frac{s}{s^2+\omega^2}f(0)+\frac{1}{s^2+\omega^2}f'(0)$$

$$=\frac{f(0)}{2}\left(\frac{1}{s+i\omega}+\frac{1}{s-i\omega}\right)+\frac{f'(0)}{2i\omega}\left(\frac{-1}{s+i\omega}+\frac{1}{s-i\omega}\right)$$

$$=\frac{f(0)}{2}\{\exp(-i\omega x)+\exp(i\omega x)\}+\frac{f'(0)}{2i\omega}\{-\exp(-i\omega x)+\exp(i\omega x)\}$$

$$=\frac{f(0)}{2}\cdot 2\cos(\omega x)+\frac{f'(0)}{2i\omega}\cdot 2i\sin(\omega x)$$

$$=f(0)\cdot\cos(\omega x)+\frac{f'(0)}{\omega}\cdot\sin(\omega x) \qquad 11・87$$

式11・86から式11・87へ代数的、形式的に計算が進められる。式11・87におけるf(0)と$\frac{f'(0)}{\omega}$が積分定数に相当する。式11・86から式11・87への計算の過程で式11・81を用い、式11・88、式11・89を用いている。

$$\exp(ix)=\cos(x)+i\sin(x) \qquad 11・88$$

$$\exp(-ix)=\cos(x)-i\sin(x) \qquad 11・89$$

[移動演算子]

式11・90の演算子h^aは関数fに作用して数値aだけ横移動させる。

$$h^a\cdot f=\{f(x-a)\} \qquad 11・90$$

演算子hは移動演算子と呼ばれる。移動量aの移動と移動量bの移動が引き続き起きると移動量a+bになるから式11・91が成り立つ。

$h^{a}\cdot h^{b}=h^{a+b}$　　　11・91

式11・91は指数法則と同型であるから、移動量aを冪の形に表示する。移動量0の移動は移動しないのと同じであるから、数演算子1と同じであり、式11・92が成り立つ。

$h^{0}=1$　　　11・92

式11・92は指数法則の式11・91と整合する。

[負の移動量]

演算子法で用いられる関数は原則として右半分関数であるが、移動量が負のとき、例外を考える必要がある。a＞0のとき、図11-9の関数fに対

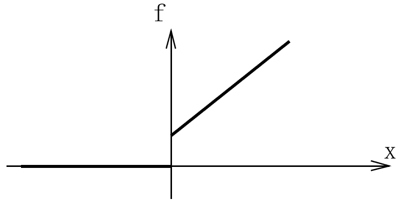

図11-9　右半分関数

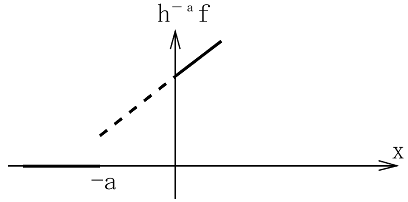

図11-10 右半分関数の負の移動

して$h^{-a}f$は図11-10の点線部分が消失し、$h^{a}(h^{-a}f)$がfと一致しない。これを避けるために、移動演算子が作用した結果については、例外的に図11-10の点線部分が消失しないことにする。始めに関数fを考えるときは図11-9のような右半分関数とするが、移動演算子が作用した$h^{-a}f$を考えるときは単なる移動とする。

[移動演算子とディラック関数]

極限操作前の式11・93の左辺の関数は図11-11のように図示される。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h^{a-\varepsilon}\{x\}-h^{a+\varepsilon}\{x\}}{2\varepsilon}=h^{a}\cdot\{1\}\qquad 11\cdot 93$$

式11・93の左辺の関数$\dfrac{h^{a-\varepsilon}\{x\}}{2\varepsilon}$を図11-11の直線FBが表し、関数$\dfrac{h^{a+\varepsilon}\{x\}}{2\varepsilon}$を直線CDが表し、直線FBの関数から直線CDの関数を引くと直線ADの関数が得られるから、式11・93の左辺の関数を折れ線EFADが表す。$\varepsilon\to 0$のとき斜線部分FAが鉛直になるから、式11・93が成り立つ。式11・73が成り立つので、式11・94が成り立ち、式11・93は式11・95に書き換えられる。

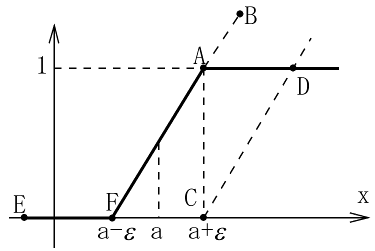

図11-11 関数 $\dfrac{h^{a-\varepsilon}\{x\}-h^{a+\varepsilon}\{x\}}{2\varepsilon}$

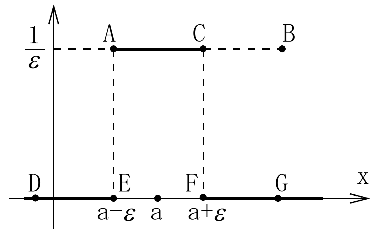

図11-12 関数 $\dfrac{h^{a-\varepsilon}\{1\}-h^{a+\varepsilon}\{1\}}{2\varepsilon}$

$$\frac{h^{a-\varepsilon}\{x\}-h^{a+\varepsilon}\{x\}}{2\varepsilon}=\frac{h^{a-\varepsilon}\{1\}^{2}-h^{a+\varepsilon}\{1\}^{2}}{2\varepsilon}=\frac{(h^{a-\varepsilon}-h^{a+\varepsilon})\cdot\{1\}^{2}}{2\varepsilon}\qquad 11\cdot 94$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(h^{a-\varepsilon}-h^{a+\varepsilon})\cdot\{1\}^{2}}{2\varepsilon}=h^{a}\cdot\{1\}\qquad 11\cdot 95$$

式11・95の両辺を関数{1}で割ると、式11・96が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(h^{a-\varepsilon}-h^{a+\varepsilon})\cdot\{1\}}{2\varepsilon}=h^{a}\qquad 11\cdot 96$$

極限操作前の式11・96の左辺の関数は図11-12のように図示される。式11・96の左辺の関数$\dfrac{h^{a-\varepsilon}\cdot\{1\}}{2\varepsilon}$を直線ABが表し、関数$\dfrac{h^{a+\varepsilon}\cdot\{1\}}{2\varepsilon}$を直線CBが表し、直線ABから直線CDBを引くと直線ACの関数が得られるから、11・96の右辺の関数を折れ線DEACFGが表す。

2つの点x＝a−ε、x＝a−εにおいて対応の不完全が許容されている。

[近似関数]

図11-12の関数を−aだけ横移動すれば、式5・145と式4・12の関数$\varDelta(x)$が得られる。

$$\varDelta(x)=\frac{1}{2\varepsilon}\qquad(-\varepsilon<x<+\varepsilon)\qquad 5\cdot 145(再掲)$$

$$\varDelta(x)=0\qquad(-\infty<x\leqq-\varepsilon,+\varepsilon\leqq x<+\infty)\qquad 4\cdot 12(再掲)$$

式5・145と式4・12の関数$\varDelta(x)$は図5-8のように図示される。式5・145は式5・141でn＝0とおけば得られる。式11・96を−aだけ横移動すれば、右辺は式11・97が成り立つ。

$h^a \cdot h^{-a} = h^0$　　11・97

式11・92を勘案すると、式5・145と式4・12の関数$\varDelta$(x)が数演算子1の近似関数になっているから、数演算子1とディラック関数δ(x)が類似の意味を持つことがわかる。図11-11の関数を-aだけ横移動すれば、式4・13、式11・98、式4・15の関数H(x)が得られる。

$H(x) = 0 \qquad (-\infty < x \leqq -\varepsilon)$　　4・13(再掲)

$H(x) = \dfrac{x}{2\varepsilon} + \dfrac{1}{2} \qquad (-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon)$　　11・98

$H(x) = 0 \qquad (+\varepsilon \leqq x < +\infty)$　　4・15(再掲)

式11・98は式5・141でn＝0とおき、式5・153の積分すれば得られる。式4・13、式11・98、式4・15の関数H(x)が定数関数{1}の近似関数になっているから、定数関数{1}とヘビサイド関数η(x)が類似の意味を持つことがわかる。演算子型の理論においては、数演算子1は数値1の意味が強く、ディラック関数δ(x)と類似の意味を持つことは重要でないと推察される。ディラック関数δ(x)と類似を論ずるのに用いる近似関数が式5・145と式4・12の関数$\varDelta$(x)の1つだけである。

[煩雑で誤りやすい手順]

数演算子1とディラック関数δ(x)の類似を論ずるとき、初めに、a＞0として図11-12を描き、h^aとδ(x-a)の類似を論ずる。次に、-aだけ横移動してh^0とδ(x)の類似を論じ、式11・92から、数演算子1とディラック関数δ(x)の類似を論ずる。-aだけ横移動するとき、図11-10の点線部分が消失しない例外を適用する。煩雑な手順であるが、この手順を省略し、初めに、図11-12を描くときに、a＝0とすると図11-10の点線部分が消失してしまい、数演算子1とディラック関数δ(x)の類似は得られない。煩雑な手順であるが、誤らないように、この手順に従う必要がある。

[分布と演算子型の超関数]

成分表示型の理論においては、式2・73のH(x)や式4・13、式4・14、式4・15のH(x)を近似関数とし、近似関数H(x)が微分可能だから、ヘビサイド関数η(x)が点x＝0において微分可能と考える。演算子型の理論においては、式4・13、式11・98、式4・15の関数H(x)が定数関数{1}の近似

関数であるが、近似関数H(x)が微分不能であり、定数関数{1}の微分可能性を論じていない。成分表示型の理論においては、式2・61の$\varDelta$(x)や式4・11、式4・12の$\varDelta$(x)を近似関数とし、近似関数$\varDelta$(x)が微分可能だからディラック関数δ(x)が点x＝0において微分可能と考える。演算子型の理論においては、式5・145と式4・12の関数$\varDelta$(x)が数演算子1の近似関数であるが、近似関数$\varDelta$(x)が微分不能であり、数演算子1の微分可能性を論じていない。演算子型の理論は、微分方程式を代数的な計算によって解く技術であり、演算子の微分可能性を論ずることは重要ではない。演算子型の理論は、関数の特異点について対応の不完全を許容する定義を適用しており、関数の一義性を放棄している。構造力学の荷重の分布を考察するときに演算子を用いても、分布の一義性を表現できない。

(3)　関数列による超関数の定義

汎関数型と成分表示型の超関数においては、補助変数εを含む近似関数F(x)を用いて超関数を定義する。補助変数εは$\varepsilon \to 0$の極限を考えるから、$0 < \varepsilon \leqq 1$と 考えて良い。$\dfrac{1}{\varepsilon} \geqq 1$であるから式11・99を満足する自然数n＝1、2、3、・・・が存在する。

$n \leqq \dfrac{1}{\varepsilon} < n+1$　　11・99

$\varepsilon \to 0$のとき、$n \to \infty$となるから、補助変数εの代わりに自然数nを用いて、超関数を定義することもできる。汎関数型の理論における式2・48において、極限$n \to \infty$とし、近似関数の関数列F(x)を用いる。成分表示型の理論における式4・5～式4・8の計算において、極限$n \to \infty$とし、近似関数の関数列F(x)を用いる。

(4)　偶超関数と奇超関数

[普通の関数の場合]

普通の関数f(x)について式11・100が成り立つとき、関数f(x)は偶関数であるという。

$f(-x) = f(x)$　　11・100

偶関数を図示すると、図11-13のように縦軸に関して対称である。普通の

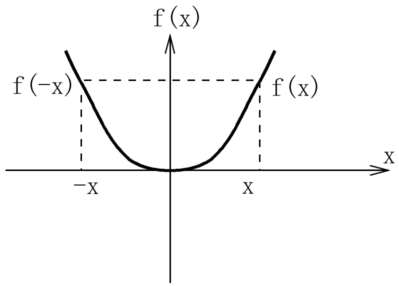

図11-13　偶関数

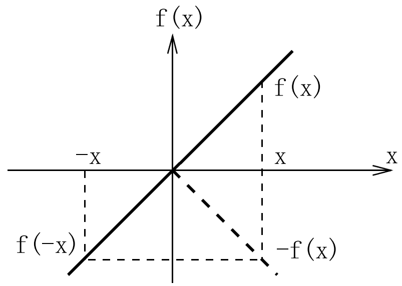

図11-14　奇関数

関数f(x)について式11･101が成り立つとき、関数f(x)は奇関数であるという。

$$f(-x)=-f(x) \qquad 11\cdot101$$

奇関数を図示すると、図11-14のように原点に関して対称である。

[対称についての認識]

普通の関数において偶関数と奇関数は、図形の対称についての認識である。普通の関数は独立変数xと従属変数yが共に数値であるから、図11-13、図11-14のように図示することができる。図示されれば、図形の対称について考察することができる。図11-13の関数f(x)は図形の対称性から積分の計算をしなくとも式11･102が成り立つことがわかる。

$$\int_{-7}^{7} f(x)\,dx=2\cdot\int_{0}^{7} f(x)\,dx \qquad 11\cdot102$$

図11-14の関数f(x)は図形の対称性から積分の計算をしなくとも式11･103が成り立つことがわかる。

$$\int_{-7}^{7} f(x)\,dx=0 \qquad 11\cdot103$$

[汎関数型の超関数の場合]

汎関数型の理論においては、奇関数ϕ(x)に対して超関数f(x)が式11･104を満足するとき超関数f(x)は偶超関数であるという。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx=0 \qquad 11\cdot104$$

偶関数ϕ(x)に対して超関数f(x)が式11･104を満足するとき、超関数f(x)は奇超関数であるという。式11･104を介して、関数ϕ(x)の偶奇を超関数f(x)の奇偶に移し替えている。関数ϕ(x)の偶奇と超関数f(x)の奇偶が反対であることに注意する。超関数を式2･78、式2･79によって普通の関数と見なすとき、偶超関数は偶関数と見なされ、奇超関数は奇関数と見なされる。

[近似関数と超関数]

汎関数型の理論においては超関数f(x)が近似関数F(x)の性質を引き継ぐから、同等な近似関数F(x)が偶関数のとき超関数f(x)が偶関数であると言うのが自然である。式2･44、式2･45の関数Δ(x)は微分する必要がなければ汎関数型の超関数δ(x)を定義する。

$$\Delta(x)=\frac{1}{\varepsilon} \qquad (0<x<\varepsilon) \qquad 2\cdot44(再掲)$$

$$\Delta(x)=0 \qquad (-\infty<x<0、\varepsilon<x<+\infty) \qquad 2\cdot45(再掲)$$

式2･44、式2･45の関数Δ(x)は偶関数ではない。式2･44、式2･45の関数Δ(x)は式11･105のように計算される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\phi(x)\,dx=\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\phi(x)\,dx<\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\{\underset{0\leqq x\leqq\varepsilon}{\mathrm{Max}}\,\phi(x)\}=\underset{0\leqq x\leqq\varepsilon}{\mathrm{Max}}\,\phi(x) \qquad 11\cdot105$$

$\varepsilon\to0$のとき、$\underset{0\leqq x\leqq\varepsilon}{\mathrm{Max}}\,\phi(x)\to\phi(0)$となり、関数$\phi$(x)が奇関数であるとすると、$\phi(0)=0$であるから、式11･105に代入して式11･106が得られる。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)\phi(x)\,dx=0 \qquad 11\cdot106$$

式11･106の関数ϕ(x)が奇関数とすると、式2･44、式2･45の関数Δ(x)が定義する超関数δ(x)が偶超関数であることを、式11･106は示している。偶関数でない近似関数Δ(x)が偶超関数δ(x)を定義するのは奇妙である。

[対称についての認識]

汎関数型の超関数は特異点において関数値が存在せず、普通の関数と異なって、図11-13、図11-14のように図示することができない。図示されないので、超関数について図形の対称を論ずることはない。偶超関数と奇超関数を用いて検討する式11･102、式11･103のような論点は見当た

らない。汎関数型の理論において、偶超関数と奇超関数を定義することは意味がないと思われる。

[実軸段差型の超関数の場合]

超関数f(x)の母関数F(z)について式11・107が成り立つとき、超関数f(x)は偶超関数であると言う。

F(−z)＝−F(z)　　　11・107

超関数f(x)の母関数F(z)について式11・108が成り立つとき、超関数f(x)は奇超関数であると言う。

F(−z)＝F(z)　　　11・108

母関数F(z)の性質を介して超関数f(x)の性質を定義している。式11・107が式11・101と同型であるから、式11・107の複素関数F(z)を奇関数と考え、式11・108が式11・100と同型であるから、式11・108の複素関数F(z)を偶関数と考えることができる。母関数F(z)と超関数f(x)の偶奇が反対になる。母関数F(z)は複素関数であり、図11−13、図11−14のように図示して、図形の対称を論ずることは難しい。

[対称についての認識]

実軸段差型の超関数は特異点において関数値が存在せず、普通の関数と異なって、図11−13、図11−14のように図示することができない。図示されないので、超関数について図形の対称を論ずることはない。偶超関数と奇超関数を用いて検討する式11・102、式11・103のような論点は見当たらない。実軸段差型の理論において、偶超関数と奇超関数を定義することは意味がないと思われる。

[演算子型の理論の場合]

演算子法で用いられる関数は原則として右半分関数であるから、偶関数も奇関数も存在しない。

[成分表示型の超関数の場合]

成分表示型の超関数の従属変数は数値ではなく、数値の組である。普通の関数と異なって、独立変数xと従属変数について図11−13、図11−14のように図示することができない。図示されないので、図形の対称を論ずることはない。成分表示型の理論においては、偶超関数と奇超関数を定義しない。

(5)　概念の一般化についての検討

[無意識のうちに伴う価値観]

超関数は関数の概念を一般化したものであると言われる。一般化と言う言葉に無意識のうちに伴う価値観に対して注意を払うべきである。一般化は定義を変更することであるから、新たに付与される性質もあるが、失われる性質もある。一般化と言う言葉は、新たに付与される性質に着目し、変更前より高度になったと感ぜられ、無意識のうちに良い価値観が伴っている。失われた性質にも着目し、重要なものを失っていないか、冷静に判断する必要がある。

[数の概念の例]

始めに人々が素朴な自然数を使い始め、負数を導入して整数とし、分数を導入して有理数とし、連続性を導入して実数とし、虚数を導入して複素数とした。自然数に対して足し算を行っても自然数の範囲であったが、引き算を行ったとき自然数からはみ出すものが出てきたので、数の概念を一般化して整数を使うようになった。負の数を導入してしたとき、引き算が常に可能になると言う性質が新たに付与される。新たに付与された性質に着目し、良い価値観が伴って理解される場合が多いく、失われた性質について論ぜられることはほとんど無い。自然数は1､2､3､・・・であり、始めの数1が有ると言う性質があった。整数は・・・、−3､−2､−1､0､1､2､3､・・・であり、始めの数は無い。引き算が常に可能と言う性質が付与された替わりに、始めの数が有ると言う性質が失われた。競走における順位のように、始めの数が有ると言う性質が重要であれば、自然数から整数への一般化は望ましくないと判断される。

[関数から超関数への一般化]

汎関数型の超関数は近似関数の性質を受け継ぐので、同等な多くの近似関数の中に微分可能な関数が存在すれば、微分可能である。超関数は微分可能関数の概念を一般化したものである。汎関数型の超関数は式2・52の収束によって定義(37頁参照)される。

$\lim_{\varepsilon \to 0} T(\phi) = \tau(\phi)$　　　　2・52(再掲)

式2・52が収束しても、特異点について式2・53が収束しない。

$\lim_{\varepsilon \to 0} F(x) = f(x)$　　　$(-\infty < x < +\infty)$　　　2・53(再掲)

特異点について関数値が定義されず、関数の一義性(151頁参照)が失われた。超関数が分布を表現すると考えるときは、関数の一義性を失うことは望ましくない。

[一義性を失わない試み]

関数から汎関数型の超関数への一般化によって、特異点における微分可能性が付与されたが、特異点における一義性が失われた。成分表示型の理論は一義性を失わないで、微分可能性を付与する試みである。普通の関数は従属変数が数値であるが、成分表示型の理論は関数の数値性(156頁参照)を失う。従属変数は数値の組であり、関数擬値または関数配列で表示される。超関数が分布を表現すると考えるときは、関数の数値性を失っても許容される。

(6)　集中力を分布力と考える

図1-8で集中力の凝視関数$F_1(x)$の単位は分布力と同じN/mとした。式1・29で成分$f_0(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$を統合するときに、代表単位(106頁参照)をN/mとした。初歩の構造力学においては、集中力、分布力、集中モーメントの3つのうちで集中力が基本と考えられている。集中力の単位Nこそが代表単位に相応しい。集中力を分布力と考える着想は、3つのうちで分布力が基本と考えることであり、常識的な着想ではない。式10・10の質量分布においても、基本と考えられる集中質量の単位kgではなく、分布質量の単位kg/mを代表単位とした。常識的な着想ではないが、西暦1900年以前から知られていたらしい。常識を越えた着想が超関数を作り出した。

[用語の英語]

第1章　荷重の分布の表現

分布荷重(1頁)	distributed load
集中荷重(1頁)	concentrated load
集中モーメント(1頁)	concentrated moment
荷重(1頁)	load
単純梁(1頁)	simple beam
材軸線(1頁)	member axis
独立変数(1頁)	independent variable
関数(1頁)	function
定義域(1頁)	domain
左連続成分(2頁)	left continuous component
段差成分(2頁)	step component
段差単位(3頁)	step unit
従属変数(3頁)	dependent variable
不連続(3頁)	discontinuous
段差(3頁)	step
広義積分(5頁)	comprehensive integral
右側積分不能(5頁)	right inintegrable
積分可能(5頁)	integrable
左側積分可能(5頁)	left integrable
連続(5頁)	continuous
一対多(6頁)	one to many
同等(6頁)	equivalent
全景眺望(6頁)	outline view
詳細凝視(6頁)	detail gaze
視点(6頁)	sight
視点移動(6頁)	sight transfer