

式1・74、式1・75は集中力の作用点において適用除外(25頁参照)であり、集中モーメントの作用点においても適用除外である。4階の微分方程式は集中力、集中モーメントの作用点において適用除外になるので、式9・163のように分布荷重のみが作用する梁に適用される。超関数を用いるときは集中力、集中モーメントの作用点においても適用可能である。図9-5の例について、従来の説明における式9・163の4回の微分方程式は適用できないが、式9・130の4回の微分方程式は適用することができ、具体的には式9・131、式9・132のように書かれ、式9・159、式9・160、式9・161、式9・162のように解かれる。

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad (+0 \leq x < a, a < x \leq \ell - 0) \quad 9 \cdot 131 \text{ (再掲)}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{EI} P \delta(x-a) \quad (x=a) \quad 9 \cdot 132 \text{ (再掲)}$$

第10章 質量の分布

(1) 質量分布の眺望関数

[質量の2種類の分布状態]

質量の分布状態には分布質量と集中質量の2つの分布状態がある。分布質量の例として未使用の鉛筆を考える。鉛筆の質量を考察するときは、太さを捨象して考えるが、長さを捨象することができず、長さを持った直線に大きさ $W \text{ kg/m}$ の質量密度が分布していると認識する。集中質量の例として小石を考える。小石の質量を考察するときは、小石の大きさを捨象して点と考え、点に大きさ $P \text{ kg}$ の質量が集中していると認識する。鉛筆の芯の位置に細い穴を開けて糸を通し、小石に細い穴を開けて糸を通し、糸を張って直線にすると、図10-1のようになる。糸に沿って座標 x を設定

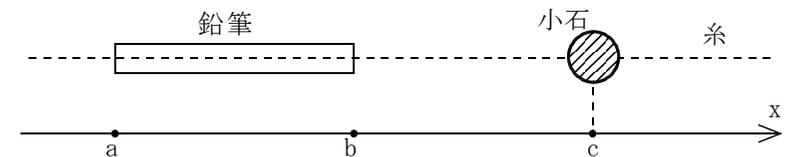


図10-1 質量の2種類の分布状態

し、座標 x の単位 m とする。鉛筆の両端が $x=a$ 、 $x=b$ とすると、鉛筆の全質量は $W(b-a) \text{ kg}$ である。小石の位置 $x=c$ とする。図10-1は図1-1と類似しているが、定義域についての想定が異なる。図1-1の定義域が $0 \leq x \leq \ell$ であるのに対し、糸はかなり長いと想定し、事実上 $-\infty < x < +\infty$ と考える。
[分布質量]

未使用の鉛筆を図10-2の上段のように、点 $x=a$ から点 $x=b$ までに置いたとき、鉛筆の質量密度 $f_0(x)$ は点 $x=a$ で急増し、点 $x=b$ で急減するから、段差(154頁参照)と考えることができ、図10-2の中段の左連続成分 $f_h(x)$ 、図10-2の下段の段差成分 $f_a(x)$ のように図示される。左連続成分 $f_h(x)$ は式10・1、式10・2、式10・3のように表される。

$$f_h(x) = 0 \quad (x \leq a) \quad 10 \cdot 1$$

$$f_h(x) = W \quad (a < x \leq b) \quad 10 \cdot 2$$

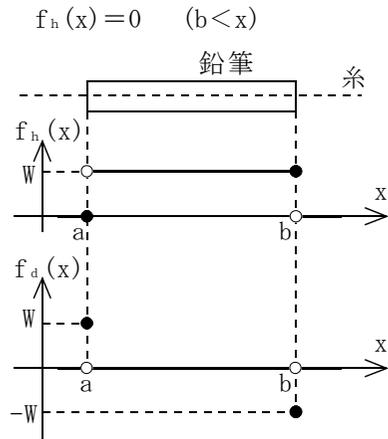


図10-2 鉛筆の眺望関数

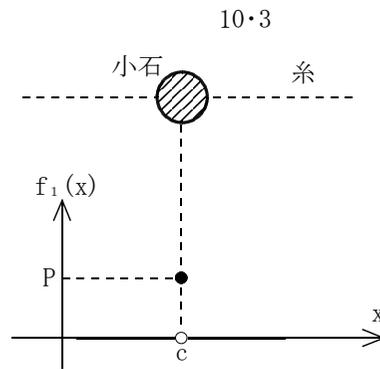


図10-3 小石の眺望関数

段差成分 $f_d(x)$ は式10・4、式10・5、式10・6のように表される。

$$f_d(x) = 0 \quad (x < a, a < x < b, b < x) \quad 10 \cdot 4$$

$$f_d(x) = W \quad (x = a) \quad 10 \cdot 5$$

$$f_d(x) = -W \quad (x = b) \quad 10 \cdot 6$$

図10-2は図1-2と類似している。関数 $f_o(x)$ は左連続成分 $f_h(x)$ と段差成分 $f_d(x)$ を用いて、式10・7で表すことができる。

$$f_o(x) = \{f_h(x), f_d(x)\} \quad 10 \cdot 7$$

関数 $f_o(x)$ は質量密度の単位kg/mを持つ。

[集中質量]

小石を図10-3の上段のように、点 $x=c$ に大きさ P の質量の小石を置いたとき、質量分布 $f_1(x)$ は図10-3の下段のように図示される。関数 $f_1(x)$ は式10・8、式10・9で表わされる。

$$f_1(x) = P \quad (x = c) \quad 10 \cdot 8$$

$$f_1(x) = 0 \quad (x \neq c) \quad 10 \cdot 9$$

関数 $f_1(x)$ は質量の単位kgを持つ。図10-3は図1-7と類似している。

[単位の異常]

図10-1には鉛筆と小石が並べて描かれており、質量分布を論じるために、関数 $f_o(x)$ と関数 $f_1(x)$ を併せた式10・10を考察する必要がある。

$$f(x) = \{f_o(x), f_1(x)\} \quad 10 \cdot 10$$

関数 $f_o(x)$ の単位kg/mと関数 $f_1(x)$ の単位kgが異なっており、単位の異常が生じている。代表単位kg/mと考え、式10・10の関数 $f(x)$ が単位kg/mを持つと考える。

[成分3個型]

式10・10に式10・7を代入すると、式10・11が得られる。

$$f(x) = \{f_h(x), f_d(x), f_1(x)\} \quad 10 \cdot 11$$

式10・11は関数配列で表示されているが、成分3個型である。

[非負]

質量が負の値を持たないことから、式10・11の成分 $f_h(x)$ と $f_1(x)$ が負にならないことに注意すべきである。成分 $f_d(x)$ については、図10-2の下段の点 $x=a$ は正であるが、点 $x=b$ は負である。

(2) 質量分布の凝視関数

[鉛筆]

鉛筆の質量分布について、図10-2の上段の状況を考えて、点 $x=a$ と点 $x=b$ は定義域に含まれる。図10-2の中段の左連続成分 $f_h(x)$ と下段の段差成分 $f_d(x)$ を用いて、式10・7の成分表示してあり、関数 $f_o(x)$ は眺望関数である。

$$f_o(x) = \{f_h(x), f_d(x)\} \quad 10 \cdot 7(\text{再掲})$$

図10-2で視点移動を試みても、滑らかな凝視関数 $F(x)$ を見出すことができない。点 $x=a$ と点 $x=b$ については、関数値を一義的に決めることができず、図10-4の白丸○で示されるように定義域外と考えざるを得ない。眺

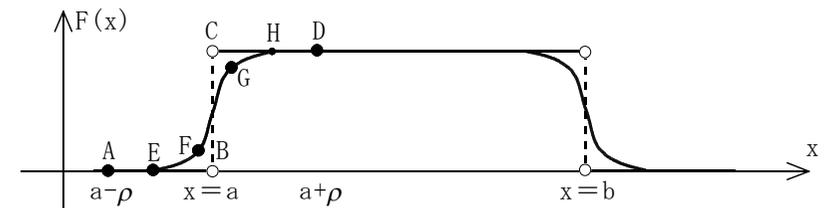


図10-4 鉛筆の凝視関数

望関数が存在するので、凝視関数が存在しないとしても、滑らかな近似

関数 $F(x)$ を想定することにし、図10-4の曲線AEFGHDを挿入する。長さ $AB=CD=\rho$ とし、式8・25、式8・26、式8・27の関数 $A_0(x)$ に大きさ W を乗じた曲線を曲線AEFGHDとして用いることができる。補助変数 ε は $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限変動する。図10-4の点域 $a-\rho \leq x \leq a+\rho$ における内部変動AEFGHDは凝視関数に起源を持たない。段差点において凝視関数は不定義である。内部変動AEFGHDは図5-4の緩和曲線から示唆を得て着想した近似関数と考えられる。

[球形の小石]

集中質量の分布 $f_1(x)$ について考えるとき、小石の大きさを捨象しないで凝視関数を考える。小石が球であると仮定すれば、小石の質量分布を計算することができる。図10-5に点 $x=c$ を中心とし、半径 ρ の球形小石

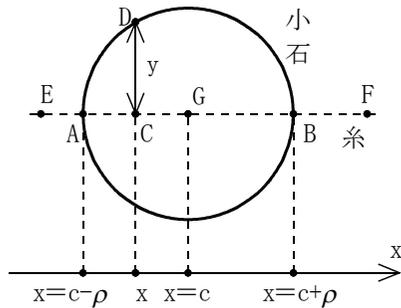


図10-5 球形小石の断面

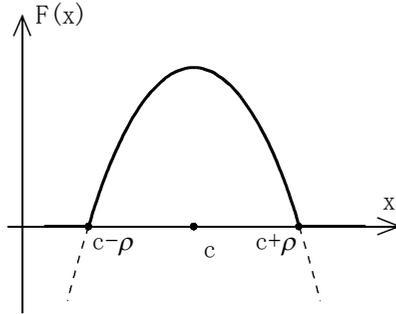


図10-6 球形の凝視関数

の断面図を示す。点Cの座標 x 、長さ $CD=y$ とすると、式10・12が成り立つ。

$$(x-c)^2 + y^2 = \rho^2 \quad 10 \cdot 12$$

式10・12は円の方方程式である。点Cを通り、糸EFに垂直な平面が球を切断した断面積 $A(x)$ は円周率 π として式10・13で表され、単位体積質量 σ として質量の分布関数 $F(x)$ は式10・14、式10・15で表され、図10-6のように図示される。

$$A(x) = \pi y^2 = \pi \{ \rho^2 - (x-c)^2 \} \quad (c-\rho \leq x \leq c+\rho) \quad 10 \cdot 13$$

$$F(x) = \sigma A(x) = \sigma \pi y^2 = \sigma \pi \{ \rho^2 - (x-c)^2 \} \quad (c-\rho \leq x \leq c+\rho) \quad 10 \cdot 14$$

$$F(x) = 0 \quad (x \leq c-\rho, c+\rho \leq x) \quad 10 \cdot 15$$

座標 x は長さの単位 m を持ち、分布関数 $F(x)$ は質量密度の単位 kg/m を持つ。

図10-6の点線は式10・14を区間 $c-\rho \leq x \leq c+\rho$ の外にまで適用して図示しているが、区間 $c-\rho \leq x \leq c+\rho$ の外においては、図10-6の実線で図示され、式10・15で表される。関数 $F(x)$ は式10・16が成り立つ。

$$\int_{c-\rho}^{c+\rho} F(x) dx = P \quad 10 \cdot 16$$

[不規則な形状の小石]

小石が球形のような規則的な形状でなく、図10-7のように不規則な場

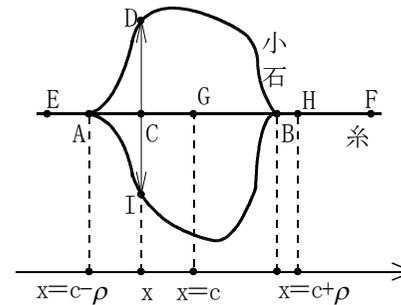


図10-7 不規則形状の断面

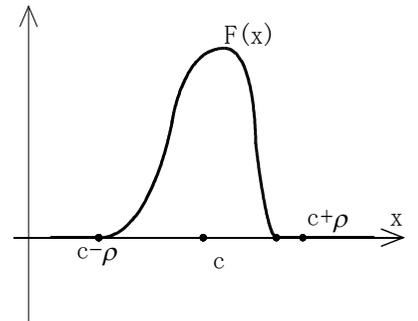


図10-8 不規則形状の凝視関数

合を考える。図10-5の場合は小石の形状が対称で、長さ AG と GB が等しいので、意識せずに図10-5の点 G を図10-1における点 $x=c$ に選んでいた。図10-7の場合は図10-1における点 $x=c$ として小石の重心を選ぶ。小石の重心から小石の表面の各点までの距離は等しくない。一次元空間で考えれば、図10-7において小石の重心と表面の距離は AG と GB であり、 GA の方が長いから GA を点半径 ρ とする。糸に沿って BH の部分は点域の内側であるが、小石の外である。区間 $c-\rho \leq x \leq c+\rho$ が点域である。点Cの座標 x とする。点Cを通り、糸EFに垂直な平面 DI が小石を切断した断面積 $A(x)$ 、単位体積質量 σ とすれば、質量の分布関数 $F(x)$ は式10・17、式10・15で表される。

$$F(x) = \sigma A(x) \quad (c-\rho \leq x \leq c+\rho) \quad 10 \cdot 17$$

$$F(x) = 0 \quad (x \leq c-\rho, c+\rho \leq x) \quad 10 \cdot 15 \text{ (再掲)}$$

式10・17、式10・15の関数 $F(x)$ は図10-8のように図示される。 BH の部分の断面積 $A(x)$ が0であるが式10・17、式10・15は成り立つ。小石の質量が P で

ある条件から式10・16が成り立つ。小石の形状は様々であり、多数の関数が断面積 $A(x)$ を表し、式10・17の関数 $F(x)$ は多数存在する。関数 $F(x)$ は式10・16を満足し、多数の等価な凝視関数を表す。

[実は成分4個型]

小石の重心を点 $x=c$ にする条件から式10・18が成り立つ。式10・18は図10-5の小石においても成り立つ。

$$\int_{c-p}^{c+p} xF(x) dx = 0 \quad 10 \cdot 18$$

式10・18により図10-7の重心位置 $x=c$ を求めることは式1・22により図1-9の集中力の作用点 $x=c$ を求めることと類似している。式10・16の数値 P は質量の単位 kg を持つ。式10・18は図10-7において重心を点 $x=c$ に一致させるための条件式である。式10・18の積分の数値 0 は点 $x=c$ の周りの質量のモーメントであり、単位 kgm を持つ。構造力学における式1・34における第2次成分 $f_2(x)$ と類似の量であるが、質量が負にならないことから質量分布の記述においては必ず 0 になってしまう。 0 以外の値をとらないことから成分と認識しなかった。図10-5においては小石の形状の対称性から式10・18の計算さえしなかった。現象を詳細に検討すると、式10・11の質量分布 $f(x)$ も式10・19の成分4個型であることがわかる。

$$f(x) = \{f_h(x), f_d(x), f_1(x), 0\} \quad 10 \cdot 19$$

式10・19の第2次成分は関数値 0 の定数関数であり、単位 kgm である。式10・19の関数 $f(x)$ の単位は kg/m である。荷重の分布と同じように質量の分布も成分4個型であるとする、物理現象において成分4個型が基本かもしれない。構造力学において、梁外力を積分することによって定義しているので、剪断力の成分数は3、曲げモーメントの成分数は2である。物理現象において、成分数が4より大きいものは見当たらない。

[超関数]

鉛筆については、凝視関数は段差点において不定義であるが、図10-4の曲線AEFGHDを挿入し、滑らかな近似関数を想定する。小石については、視点移動を極限変動によって代用し、式10・17、式10・15の凝視関数を近似関数に変換する。近似関数が得られたので、式10・19の質量分布を超関

数と考えて良い。

(3) 集中質量とディラック関数

点 $x=0$ に置かれた大きさ1の集中質量を式10・19に従って式3・3、式3・4で表すことができる。

$$\lambda(x) = (0, 0, 1, 0) \quad (x=0) \quad 3 \cdot 3(\text{再掲})$$

$$\lambda(x) = (0, 0, 0, 0) \quad (x \neq 0) \quad 3 \cdot 4(\text{再掲})$$

式10・8、式10・9で $P=1$ 、 $c=0$ と置き、式10・19に代入すると、式3・3、式3・4が得られる。式3・3、式3・4は、点 $x=0$ に置かれた大きさ1の集中力(56頁参照)を表す関数 $\lambda(x)$ と同じである。質量の分布を表す $\lambda(x)$ の単位は kg/m であり、荷重の分布を表す $\lambda(x)$ の単位は N/m である。質量の分布を表す $\lambda(x)$ の近似関数 $\Lambda(x)$ の集合とディラック関数 $\delta(x)$ の近似関数 $\Delta(x)$ の集合は式3・48の包含関係(64頁参照)が成り立つ。

$$(\Delta(x) \text{の集合}) \subset (\Lambda(x) \text{の集合}) \quad 3 \cdot 48(\text{再掲})$$

ディラック関数 $\delta(x)$ が点 $x=0$ に置かれた大きさ1の集中質量 $\lambda(x)$ を表すことができるが、ディラック関数 $\delta(x)$ 以外のものでも集中質量 $\lambda(x)$ を表すものが存在する。