分布を表示する超関数

A hyperfunction expresses a distribution

小林　保（日本建設情報総合センター）
Kobayasi Tamotu,Japan Construction Information Center
FAX:03-3589-6258　　　Email:kobayast@jacic.or.jp

The structural mechanics defines three kinds of load,that is distributed force,concentrated force,concentrated moment.Using the hyperfunction,the three kinds of load may be expressed in the same way.And the concentrated force is expressed by the singular point of the Dirac function.The theory of the hyperfunction explains that value at the singular point of the Dirac function does not exist.The auther proposes that the characteristics of the singular point of the Dirac function shoud be understood as the concentration of the definite integuration.Using this concept,somthing like function value is defined,then distrbution of load is expressed as the correspondense between coordinate along member axis and the something like function value.

１．はじめに

関数を用いて分布を表示することができる。関数は独立変数という数値と従属変数という数値の対応関係である。図-1に示すように、単純梁のたわみの分布は、材軸線に沿

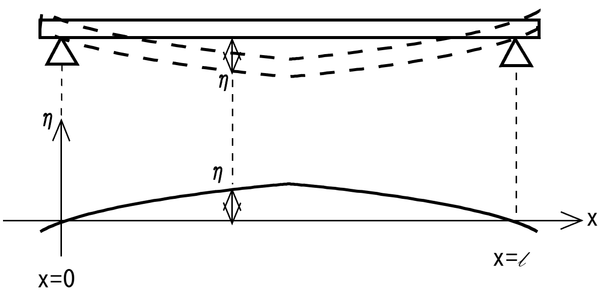

図-1　たわみの分布

う座標xとたわみηの対応関係として把握することができる。図-1の上部では力学の習慣に従い、下側に生ずるたわみを正としているが、下部のグラフでは数学の習慣に従い、上向きを正としている。数値xと数値ηの対応関係であるから関数である。

単純梁に作用する荷重は、単位の異なる３種類がある。３種類を統合した荷重の分布を関数で表すことはできない。この報告においては、荷重の分布を超関数を用いて表示することについて考察した。

２．構造力学における荷重の表示

荷重f(x)は図-2に示すように、単位N/mの分布力w(x)と単位Nの集中力p(x)と単位Nmの集中モーメントμ(x)から成る。

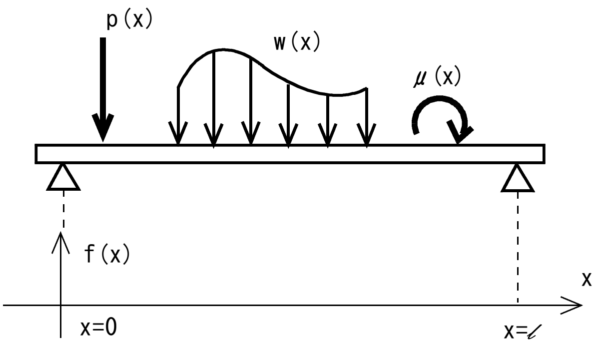

図-2　荷重の分布

梁に作用している荷重f(x)は、座標xで表される１次元空間に分布している。３種類の統合を考えるために、単位N/mを代表単位とし、荷重f(x)の単位をN/mとすれば、

$$f(x)\mathrm{N/m}=w(x)\mathrm{N/m}+p(x)\mathrm{N}+\mu(x)\mathrm{Nm}\quad\cdots(1)$$

代表単位N/mで両辺を割ると、

$$f(x)=w(x)+p(x)\mathrm{m}+\mu(x)\mathrm{m}^2\quad\cdots(2)$$

「m」は座標xの単位であり、長さの単位である。構造力学における荷重の表示であることから離れ、式(2)を数式として一般化、抽象化して、横軸xの単位という意味で「横軸単位」と呼び、記号「⊖」を用いることを提案する。単位「m」を記号「⊖」で置き換えると、

$$f(x)=w(x)+p(x)⊖+\mu(x)⊖^2\quad\cdots(3)$$

荷重の分布は超関数を用いて表示することができるが、集中力p(x)と集中モーメントμ(x)は超関数の特異点で表示される。超関数についてのSchwarzの理論においても佐藤の理論においても、超関数の特異点については「関数値は存在しない」と説明するだけである。式(3)の表現は点xにおける超関数の状態を表示しており、関数における関数値と同じように扱うと便利である。式(3)の表現を関数擬値と呼ぶことを提案する。関数擬値について数学的に説明するために、定積分の集中について考える。

３．定積分の集中

任意の積分可能関数f(x)は、任意の点x=aについて式(4)を満足する。

$$\lim_{\zeta\to 0}\int_{a-\zeta}^{a+\zeta} f(x)dx=0\quad\cdots(4)$$

$$\int_{a-0}^{a+0} f(x)dx=0\quad\cdots(5)$$

式(4)は式(5)と略記することができ、区間a-0≦x≦a+0における定積分である。点x=aと区間a-0≦x≦a+0を同一視するのは自然であるから、式(5)は点x=aにおける定積分と考えても良い。積分可能関数の点における定積分は必ず0になる。

ディラック関数δ(x)の特異点x=0においては、式(6)が

$$\int_{-0}^{+0}\delta(x)dx=1\quad\cdots(6)$$

成り立つ。式(6)は区間 -0≦x≦+0における定積分が0でな

い値を持つことを意味しており、式(5)と反する。この性質がディラック関数$\delta(x)$の特異点の特徴である。点における定積分が0でない値を持つので、定積分の集中と呼ぶことを提案する。

４．モーメント定積分

任意の関数$f(x)$について、式(7)のI_kを点$x=a$における第k次のモーメント定積分と呼ぶことを提案する。

$$I_k=\int_{a-0}^{a+0}(x-a)^k f(x)\,dx \quad \cdots(7)$$

式(6)は点$x=0$における第0次のモーメント定積分である。ディラック関数の導関数$\delta'(x)$の特異点$x=0$においては、式(8)が成り立ち、第1次のモーメント定積分の集中が生じる。

$$\int_{-0}^{+0} x\delta'(x)\,dx=-1 \quad \cdots(8)$$

５．関数擬値の提案

ディラック関数及びその導関数は、特異点においてモーメント定積分の集中が生じるので、その値を用いて特異点の状態を表現することを考えた。

任意の関数$f(x)$が点$x=a$において第k次のモーメント定積分の集中を生じるとき、その値I_kを$f(a)$とする。ただし、モーメント定積分の集中であることを表示しないと混乱する。関数$f(x)$が単位Ｔを持ち、変数xが単位Θを持つとすれば、第k次のモーメント定積分は単位$T\Theta^{k+1}$を持つ。単位を添えて、式(9)のように書けば、混乱を防げる。

$$f(a)T=I_k T\Theta^{k+1} \qquad (9)$$

両辺をＴで割れば、式(10)を得る。

$$f(a)=I_k\Theta^{k+1} \qquad (10)$$

式(10)においては、Θは単位の意味を失い、モーメント定積分の集中が生じていることの目印になっている。

ディラック関数の特異点については

$$\delta(0)=\Theta \qquad (11)$$

ディラック関数の導関数の特異点については

$$\delta'(0)=-\Theta^2 \qquad (12)$$

６．ヘビサイド関数の関数擬値

ヘビサイド関数$H(x)$は点$x=0$において、特異点を持つ。特異点において滑らかな段差を持ち、段差$H(+0)-H(-0)$がこの特異点の特徴的な量であるから、この量に滑らかな段差の目印を添えて関数擬値とするのが自然である。目印としてΘ^0 を用いることを提案する。但しこの場合、指数法則$\Theta^0=1$を適用しないものとする。

ヘビサイド関数の特異点については

$$H(0)=\Theta^0 \qquad (13)$$

ヘビサイド関数$H(x)$の特異点点$x=0$において、滑らかではあるが、段差が集中している。

７．連続関数の関数擬値

連続関数$f(x)$については、関数値をそのまま関数擬値と考える。Θ、Θ^2、Θ^0 などの目印に相当するのは、連続関数の関数擬値の場合、数値１である。

超関数は連続な点、第k次のモーメント定積分の集中する点、滑らかな段差の集中する点から構成されており、関数擬値によりその区別を表示することができる。関数擬値は、集中の有無とその種類をΘ、Θ^2、Θ^0、１などの目印によって区別する。関数擬値は目印を基底ベクトルとするベクトルと考えることもでき、超関数はベクトル値関数と考えることもできる。

８．特異点の内部構造

ディラック関数$\delta(x)$の特異点において定積分の集中が生ずるのは、特異点が内部構造を持つからであると考えることを提案する。

式(14)の関数$\omega(x)$を用いて式(15)で表される関数$\pi(x)$の概形は、図-3のようになる。

$$\omega(x)=\frac{(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)!}{2^{2\lambda+1}(\lambda!)^2\varepsilon^{2\lambda+1}}(x^2-\varepsilon^2)^{\lambda} \quad \cdots(14)$$

$$\pi(x)=\begin{cases}0 & (-\infty<x<-\varepsilon)\\ \omega(x) & (-\varepsilon\leqq x<+\varepsilon)\\ 0 & (+\varepsilon\leqq x<+\infty)\end{cases} \quad \cdots(15)$$

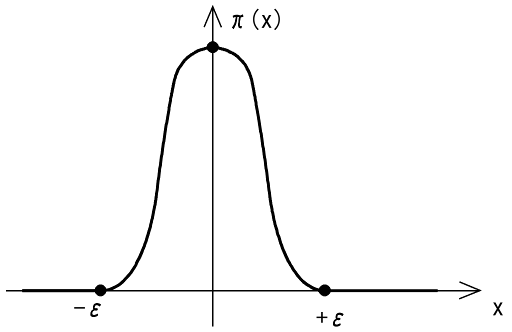

図-3　特異点の内部構造

関数$\pi(x)$は区間$-\infty<x<+\infty$の全域で$\lambda-1$回微分可能であり、$\lambda\to\infty$の極限を考えると無限回微分可能である。関数$\pi(x)$は、式(16)を満足する。

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\pi(x)\,dx=1 \quad \cdots(16)$$

式(16)で$\varepsilon\to+0$とし、式(6)と比べると、$\pi(x)\to\delta(x)$となる。

関数$\pi(x)$の部分である関数$\omega(x)$が区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$において、関数$\delta(x)$の特異点$x=0$の内部構造を表示する。 $\varepsilon\to+0$の極限を考えると、区間$-\varepsilon\leqq x\leqq+\varepsilon$は区間$-0\leqq x\leqq+0$になる。区間$-0\leqq x\leqq+0$は点$x=0$と同一視されるから、関数$\omega(x)$で表示される内部構造が点$x=0$に凝縮される。

９．おわりに

構造力学における荷重のように単位の異なる複数の種類を統合した量の分布は、関数を用いて表示することはできず、超関数を用いる必要がある。超関数について「関数擬値」を定義すれば、分布する空間を表示する座標と関数擬値の対応関係として「分布」を把握することができる。座標は数値の組であり、関数擬値も数値の組であるから、超関数は広義の関数である。

関数擬値を定義するために、超関数の性質の中で「モーメント定積分の集中」に注目した。ヘビサイド関数については「段差の集中」に注目した。集中している量に「横軸単位」の羃を添えて特異点における関数擬値とした。定積分の集中が生ずるのは特異点が「内部構造」を持つためであると考えた。